

Lösungen
der
Rechnungsaufgaben
für
Schuldienst-Exspektanten.

Von **Dr. Georg Holzner.**

III. Teil.

Aufgaben aus der Stereometrie.

Mit 61 in den Text eingedruckten Figuren.

Wilh. Tümmel's Buch- u. Kunstdruckerei, Nürnberg.

Lösungen

Rechnungsaufgaben

Schuldienst-Exspektanten

Von Dr. Georg Holzner

III. Teil

Aufgaben aus der Stereometrie

Mit 81 in den Text eingetragenen Figuren

Einleitung.

Zur Lösung der nachfolgenden Aufgaben über die Oberfläche und den Inhalt von Körpern reichen die bekannten Sätze und Grundformeln vollständig aus. Die paar Bemerkungen, welche ich hier mache, können wohl unter Umständen eine vorteilhafte Verwendung finden, müssen aber nicht gebraucht werden.

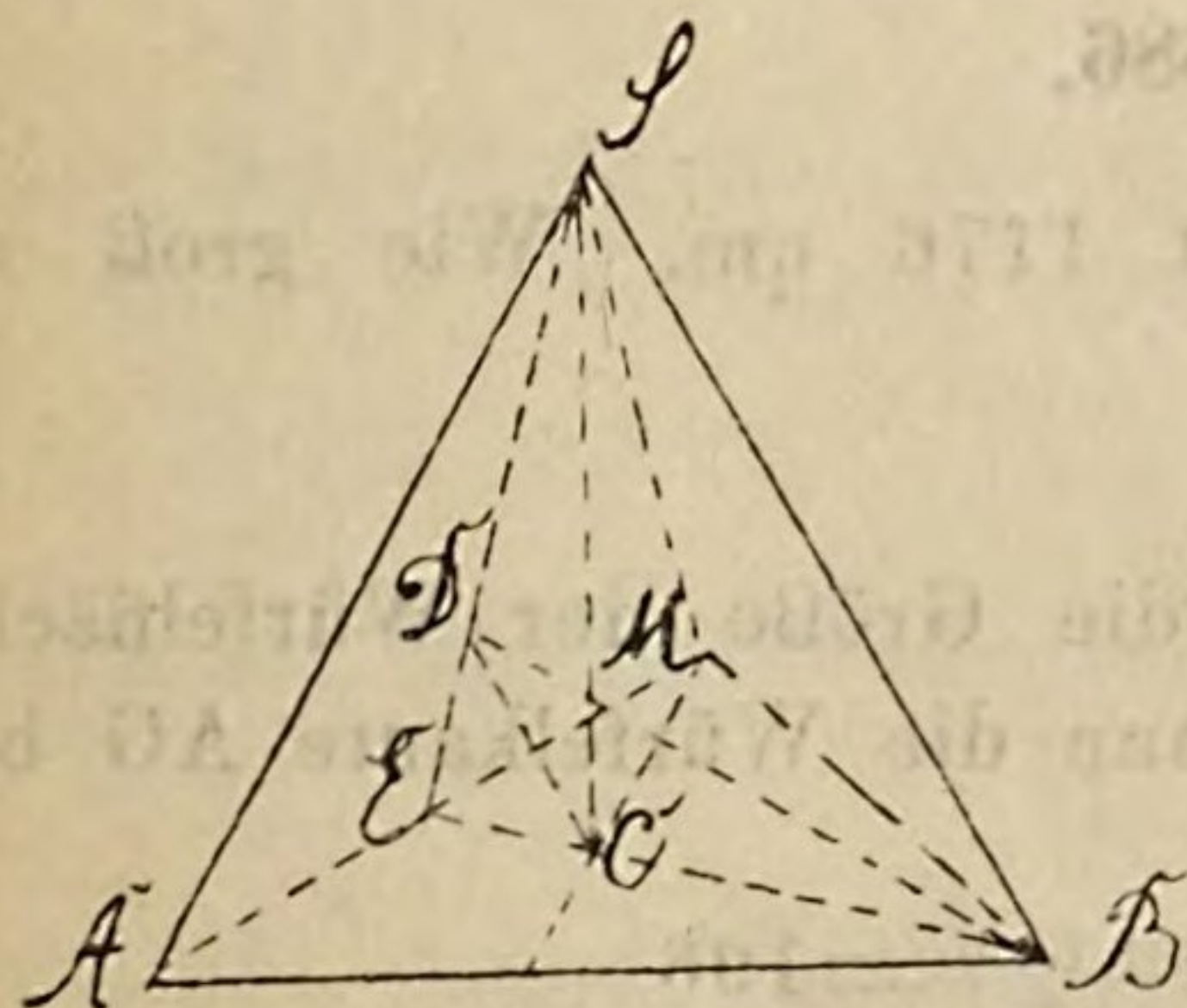


Fig. 1.

Beim regulären Dreieck haben wir gesehen, daß der Radius des umschriebenen Kreises $\frac{2}{3}$ der Höhe und des eingeschriebenen Kreises $\frac{1}{3}$ der Höhe ist. In analoger Weise ist der Radius der um ein reguläres Tetraëder beschriebenen Kugel $\frac{3}{4}$ der Tetraëder-Höhe, der Radius des in das Tetraëder eingeschriebenen Kugel $\frac{1}{4}$ der Tetraëder-Höhe. Zum Beweise verbinde man in der Ebene BSE (Fig. 1) die Mittelpunkte

der in die Tetraëderseiten eingeschriebenen Kreise, nämlich die Punkte D und C durch eine Gerade (DC), dann ist $EC = ED = \frac{1}{3} BE$, daher $DC \parallel SB$. Ferner ist

$EB:EC = SB:DC$, daher $DC = \frac{1}{3} SB$; endlich ist $\triangle DCM \sim \triangle SMB$, daher $DC:MC = SB:SM$, und da $DC = \frac{1}{3} SB$ ist, so ist

$$\frac{1}{3} SB:MC = SB:SM$$

$$MC = \frac{1}{3} SM = \frac{1}{4} SC \text{ und}$$

$$SM = \frac{3}{4} SC.$$

Das reguläre Tetraëder ist eine Hemiedrie des Würfels, welcher zur Diagonale einer Seite die Tetraëderkante hat. Durch die Ableitung des Tetraëders vom Hexaëder findet man leicht, daß der körperliche Inhalt eines Tetraëders $\frac{1}{3}$ des Inhaltes seiner Stammform ist. (Weitere nette Folgerungen unterlasse ich.)

Durch die Schnitte, welche durch die drei Achsen eines regulären Oktaëders geführt werden, entstehen 8 Pyramiden, deren Scheitel im Mittelpunkte des Oktaëders zusammenstoßen, und deren Grundflächen die regulären Seitendreiecke sind. Der Inhalt des Oktaëders ist $\frac{1}{3} k^3 \sqrt{2}$, wobei k die Länge einer Kante bezeichnet. Jede der 8 Pyramiden hat den Inhalt $\frac{1}{24} k^3 \sqrt{2}$. Bezeichnet man mit h die Höhe einer solchen Pyramide, so ist

$$\frac{h}{3} \times \frac{k^2}{4} \sqrt{3} = \frac{1}{24} k^3 \sqrt{2}$$

$$h = \frac{1}{2} k \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} k \sqrt{6}$$

Die Höhe einer solchen Pyramide ist der Radius der Kugel, welche in das Oktaëder eingeschrieben wird.

Würfel.

3. Oberpfalz. 1886.

Die Oberfläche des Würfels beträgt 1176 qm. Wie groß ist seine Diagonale?

Lösung.

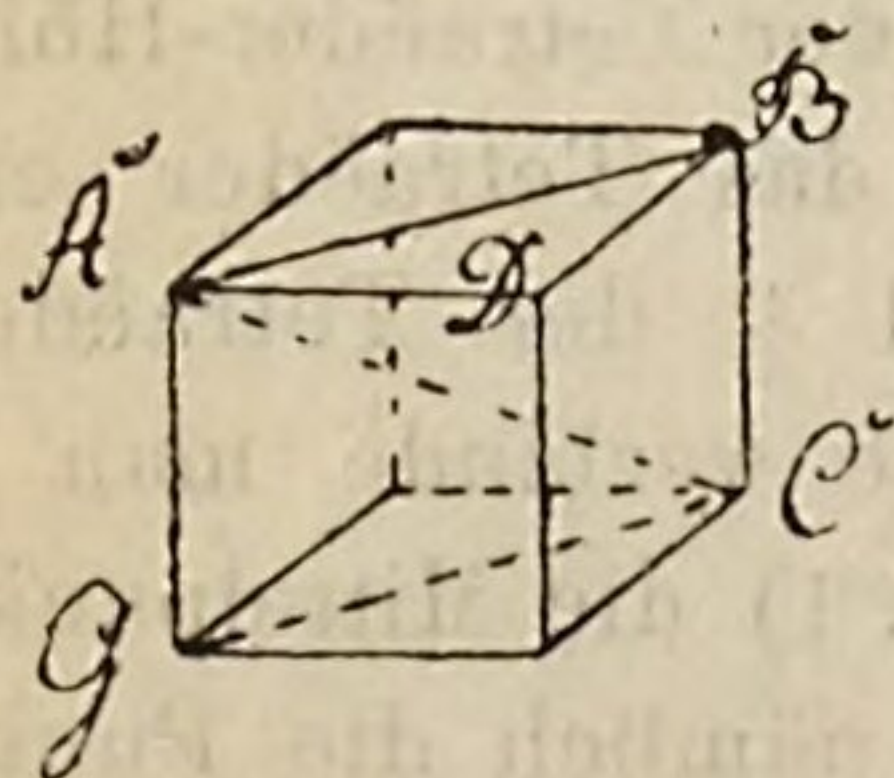


Fig. 2.

I. Es wird zuerst die Größe der Würfelfläche (F Fig. 2) und dann die Würfelkante AG berechnet.

$$F = \frac{1176}{6} = 196$$

$$AG = \sqrt{196} = 14 \text{ m.}$$

II. Die Diagonale $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} =$

$$\sqrt{AG^2 + AD^2 + BD^2} = \sqrt{3AG^2} = AG \sqrt{3}$$

$$AC = 14 \times 1,732 = 24,248 \text{ m.}$$

Antwort: Die Diagonale mißt 24,248 m.

4. Oberpfalz. 1894.

Die Summe aus der Kante und der Körperdiagonale eines Würfels beträgt 683 cm. Wie groß ist die Kante, die Körperdiagonale und das Volumen dieses Würfels?

Lösung.

I. Setzt man (Fig. 2) $AG = x$, so ist $AC = x \sqrt{3}$

II. Gemäß der Angabe ist

$$AG + AC = 683, \text{ daher}$$

$$\begin{aligned}\text{III.} \quad & x + x\sqrt{3} = 683 \\ & x + 1,732x = 683 \\ & x = \frac{683}{2,732} = 25 \text{ cm.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{IV. Die Körperdiagonale (AC) ist } AC &= x\sqrt{3} \\ AC &= 25 \times 1,732 = 43,3 \text{ cm.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{V. Das Volumen des Würfels (V) beträgt} \\ V &= (25)^3 \\ V &= 15625 \text{ ccm.}\end{aligned}$$

Antwort: Die Kante ist 25 cm, die Körperdiagonale 43,3 cm, das Volumen 15625 ccm groß.

Gerade Prismen.

4. Schwaben. 1886.

Ein Holzhaufen, welcher 6 m lang, 4 m breit und 1,75 m hoch ist, soll auf einen 8 m langen und 2 m breiten Raum gesetzt werden. Welche Höhe muß nun der Holzhaufen erhalten?

Lösung.

Bezeichnet man die gesuchte Höhe mit x m, so ist

$$\begin{aligned}x \times 8 \times 2 &= 6 \times 4 \times \frac{7}{4} \\ x &= \frac{6 \times 7}{8 \times 2} = \frac{21}{8} = 2,625 \text{ m.}\end{aligned}$$

Antwort: Der Holzhaufen muß die Höhe von 2,625 m erhalten.

4. Oberpfalz. 1890.

Ein Lehrer hat fassionsmäßig zu fordern $16\frac{1}{2}$ Klafter Fichtenscheitholz, die Klafter 6 Fuß lang, 6 Fuß hoch und mit $3\frac{1}{2}$ Fuß Scheitlänge. Was gibt dies nach dem Metermaße, wenn $1 \text{ m} = 3,42 \text{ Fuß}$ (genauer 3,4263 Fuß) hält?

Lösung.

I. Es geben $16\frac{1}{2}$ Klafter $V = 16\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 2\frac{1}{2} = 2079$ Kubikfuß.

II. Je $(3,4263)^3$ Kubikfuß geben 1 Ster. Die Anzahl Ster für

$$16\frac{1}{2} \text{ Klafter sind } \frac{2079}{(3,4263)^3} = 51,686 \text{ Ster.}$$

Antwort: $16\frac{1}{2}$ Klafter geben 51,686 Ster Holz.

2. Pfalz. 1888.

Der Fußboden meines größten Zimmers hat 40,60 qm, die eine Seitenwand 24,50 qm und die andere, an diese anstoßende, 20,30 qm Oberfläche. Wie lang, breit und hoch ist das Zimmer?

Lösung.

Bezeichnet man die Länge AC (Fig. 3) mit x m, die Breite CD mit y m und die Höhe BC mit z m, so ist

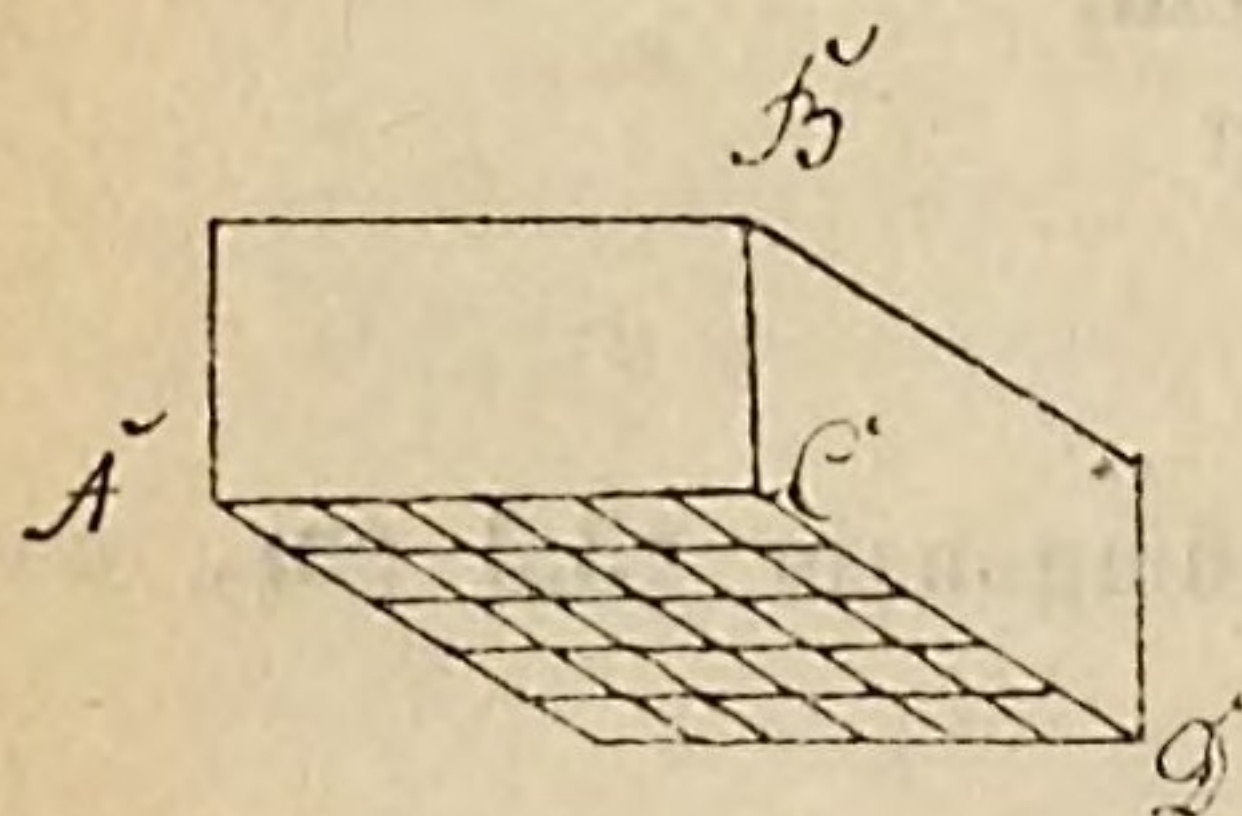


Fig. 3.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & xy = 40,60 \\ \text{II.} & xz = 24,50 \\ \text{III.} & yz = 20,30 \\ \hline \text{IV} &= \text{I} : \text{III} & \frac{x}{z} = 2 \\ \text{V} &= \text{IV} \times \text{II} & x^2 = 49 \\ & & x = 7 \text{ m} \\ & & y = 5,8 \text{ m} \\ & & z = 3,5 \text{ m.} \end{array}$$

Antwort: Das Zimmer ist 7 m lang, 5,8 m breit und 3,5 m hoch.

4. Pfalz. 1889.

Die quadratische Grundfläche eines senkrechten Prismas enthält 1764 qcm, und die Diagonale eines Seitenrechteckes mißt $79\frac{1}{2}$ cm.

- a) Wie lang ist eine Seite der Basis? b) Wie hoch ist das Prisma?
c) Wie groß ist seine Oberfläche? d) Wie hoch müßte ein Prisma mit rechteckiger Grundfläche sein, welches mit jenem gleiche Basis und Oberfläche haben soll, wenn sich seine Grundkanten wie 16 : 9 verhalten?

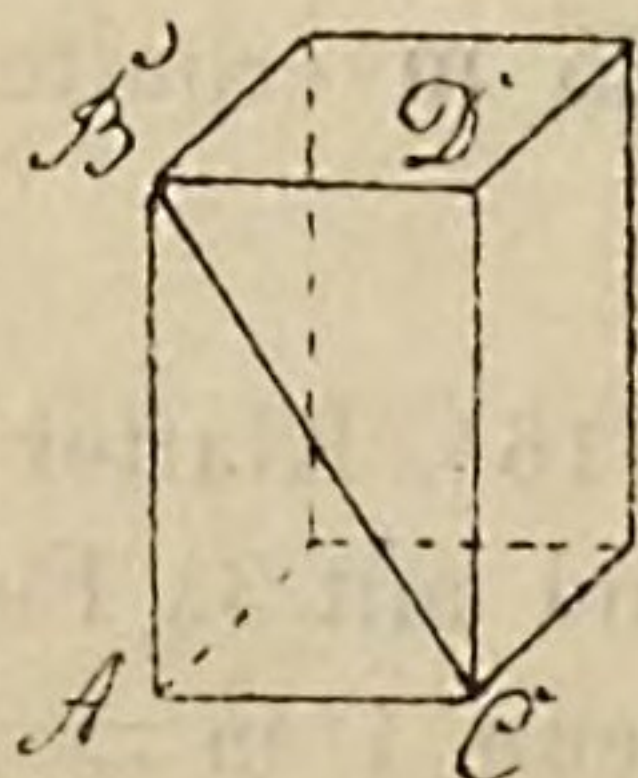


Fig. 4.

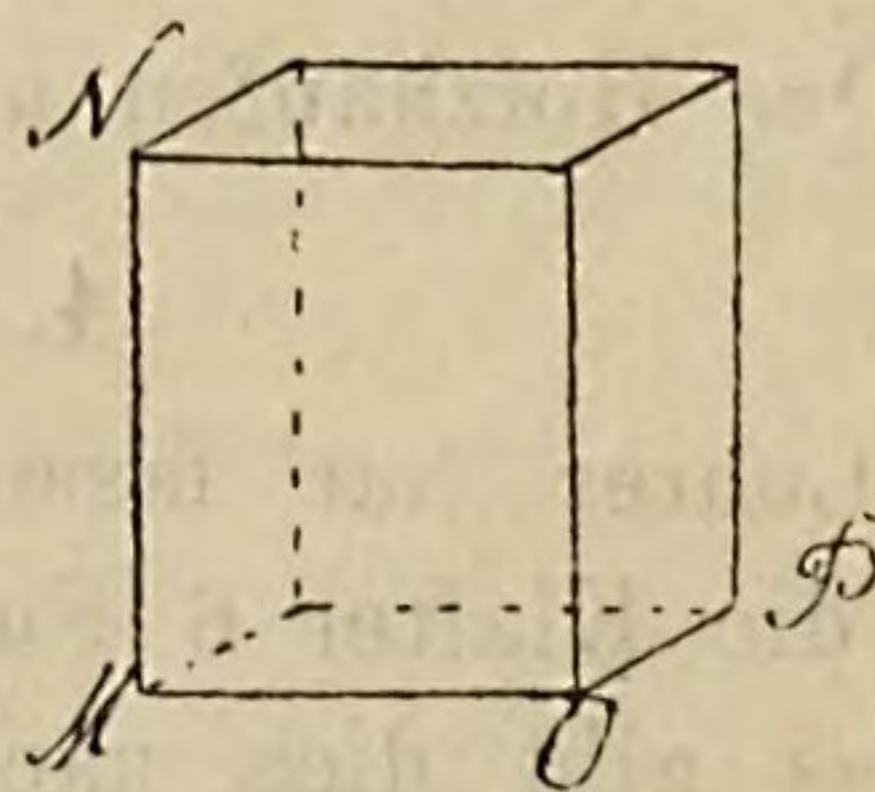


Fig. 5.

Lösung.

- I. Aus der Größe der quadratischen Grundfläche wird die Länge der Grundkante AC (Fig. 4) berechnet.
- II. Die Höhe des Prismas AB ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreieckes ABC.
- III. Die Oberfläche des quadratischen Prismas sei O.
- IV. Da vom rechteckigen Prisma (Fig. 5) die Größe der Grundfläche und das geometrische Verhältniß der Grundkanten bekannt ist, so können letztere leicht berechnet werden.
- V. Die Höhe des rechteckigen Prismas MN sei $= y$.

Ausführung.

I. $AC = \sqrt{1764} = 42 \text{ cm.}$

II. $AB = \sqrt{(BC)^2 - (AC)^2} = \sqrt{(79,5)^2 - (42)^2} = 67,5 \text{ cm.}$

III. $O = 2 \times 1764 + 4 \times 42 \times 67,5 = 14868 \text{ qcm.}$

VI. $16x \times 9x = 1764$

$$4x^2 = 49$$

$$x = \frac{7}{2}, \text{ daher } MO = 56 \text{ und } OP = 31,5 \text{ cm.}$$

V. $2 (MO \times MN + OP \times MN) = 11340$

$$2y (56 + 31,5) = 11340$$

$$y = 64,8 \text{ cm.}$$

Antwort: a) Die Grundkante des quadratischen Prismas ist **42 cm** lang.
b) Die Höhe dieses Prismas ist **67,5 cm**. c) Dessen Oberfläche beträgt **14868 qcm**. d) Die Höhe des rechteckigen Prismas ist **64,8 cm**.

3. Niederbayern. 1882.

Die Grundfläche eines 8 dm hohen senkrechten Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck; halbiert man diesen Körper durch einen von der Mitte einer Seite zur gegenüberliegenden Kante gehenden Schnitt, so beträgt die Fläche des Schnittes 41,568 qdm. Wie groß ist: a) die Oberfläche? b) das Volumen des Prismas?

Lösung.

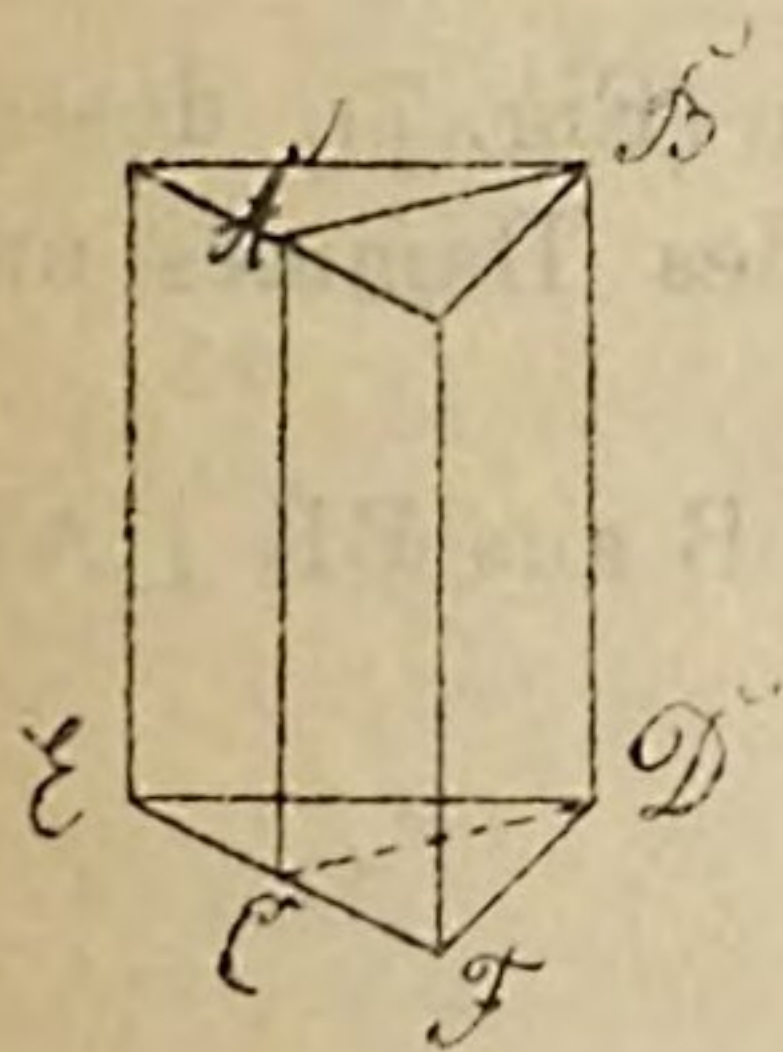


Fig. 6.

1. Der Schnitt ABDC (Fig. 6) ist ein Rechteck, dessen Flächeninhalt und Höhe gegeben ist, so daß man dessen Grundlinie CD berechnen kann.
2. CD ist die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck. Ist daher CD berechnet, so kann man die Dreiecksseite DF bestimmen, somit auch
3. die Grundfläche und
4. die Seitenflächen.
5. Die Oberfläche des Prismas besteht aus zwei kongruenten Grundflächen ($2 \times DEF$) und 3 kongruenten Seitenflächen ($3 DE \times DB$).
6. Das Volumen ist = dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Ausführung.

1. $AC \times CD = 41,568$

$$8 \times CD = 41,568$$

$$CD = 5,196 \text{ dm.}$$

$$2. DF^2 - CF^2 = CD^2$$

$$\overline{DF}^2 - \left(\frac{DF}{2}\right)^2 = (5,196)^2$$

$$\frac{3}{4} \overline{DF}^2 = 5,196 \times 5,196$$

$$DF = 2 \sqrt{5,196 \times 1,732} = 2 \sqrt{3 \times 1,732 \times 1,732} = 2 \sqrt{9} = 6 \text{ dm.}$$

$$3. \triangle EDF = \frac{EF \times CD}{2} = 5,196 \times 3 = 15,5880 \text{ qdm.}$$

$$4. DF \times BD = 6 \times 8 = 48 \text{ qdm.}$$

$$5. \text{ Die Oberfläche (O) des Prismas } O = 2 \times 15,588 + 3 \times 48 = 175,1760 \text{ qdm.}$$

$$6. \text{ Das Volumen (V) des Prismas } V = 15,588 \times 8 = 124,704 \text{ cdm.}$$

Antwort: a) Die Oberfläche des Prismas beträgt **175,1760 qdm.** b) Das Volumen ist **124,704 cdm.**

4. Unterfranken. 1890.

Ein Eisenbahndamm ist oben 5,3 m breit und die Höhe beträgt 6,4 m; sein Böschungswinkel ist 60° . Welchen kubischen Inhalt hat das laufende Meter dieses Dammes?

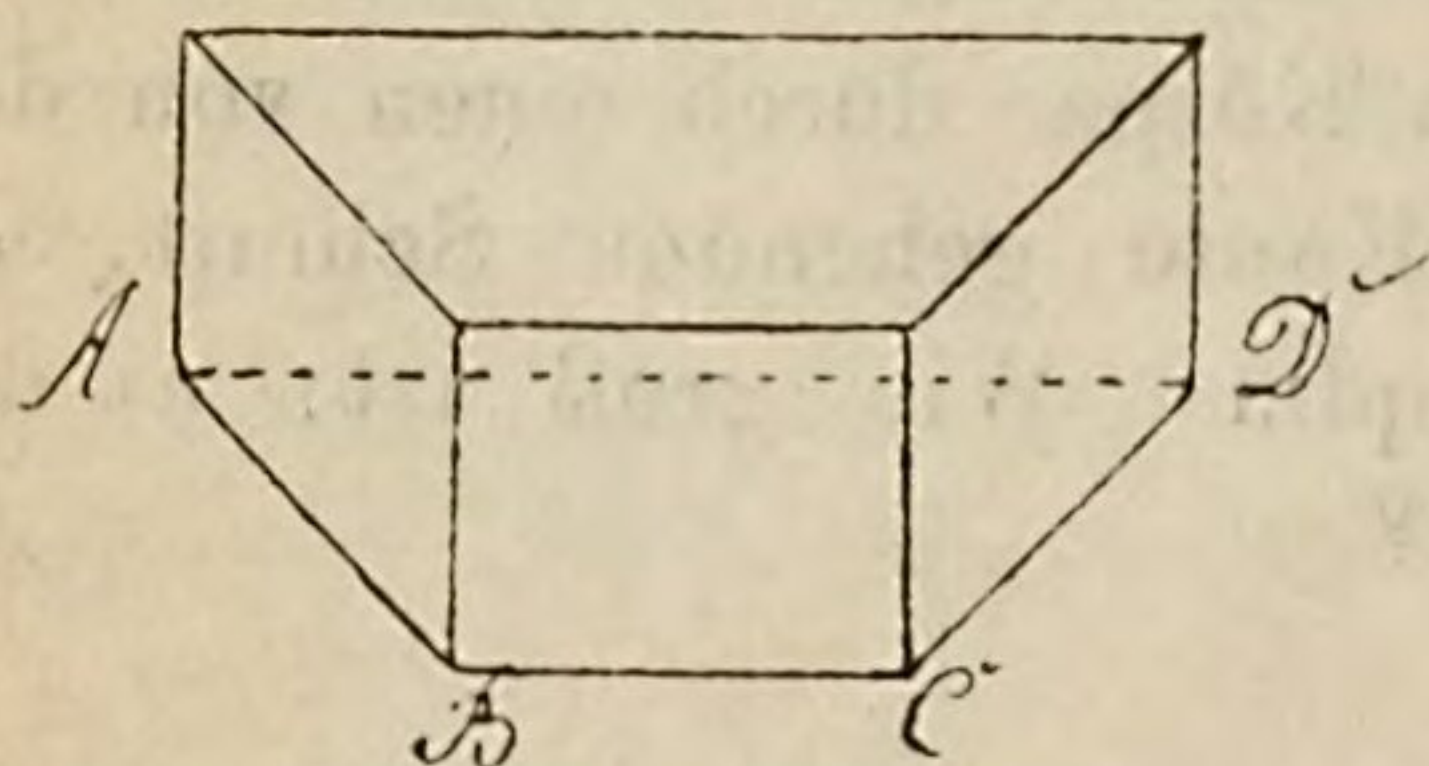


Fig. 7.

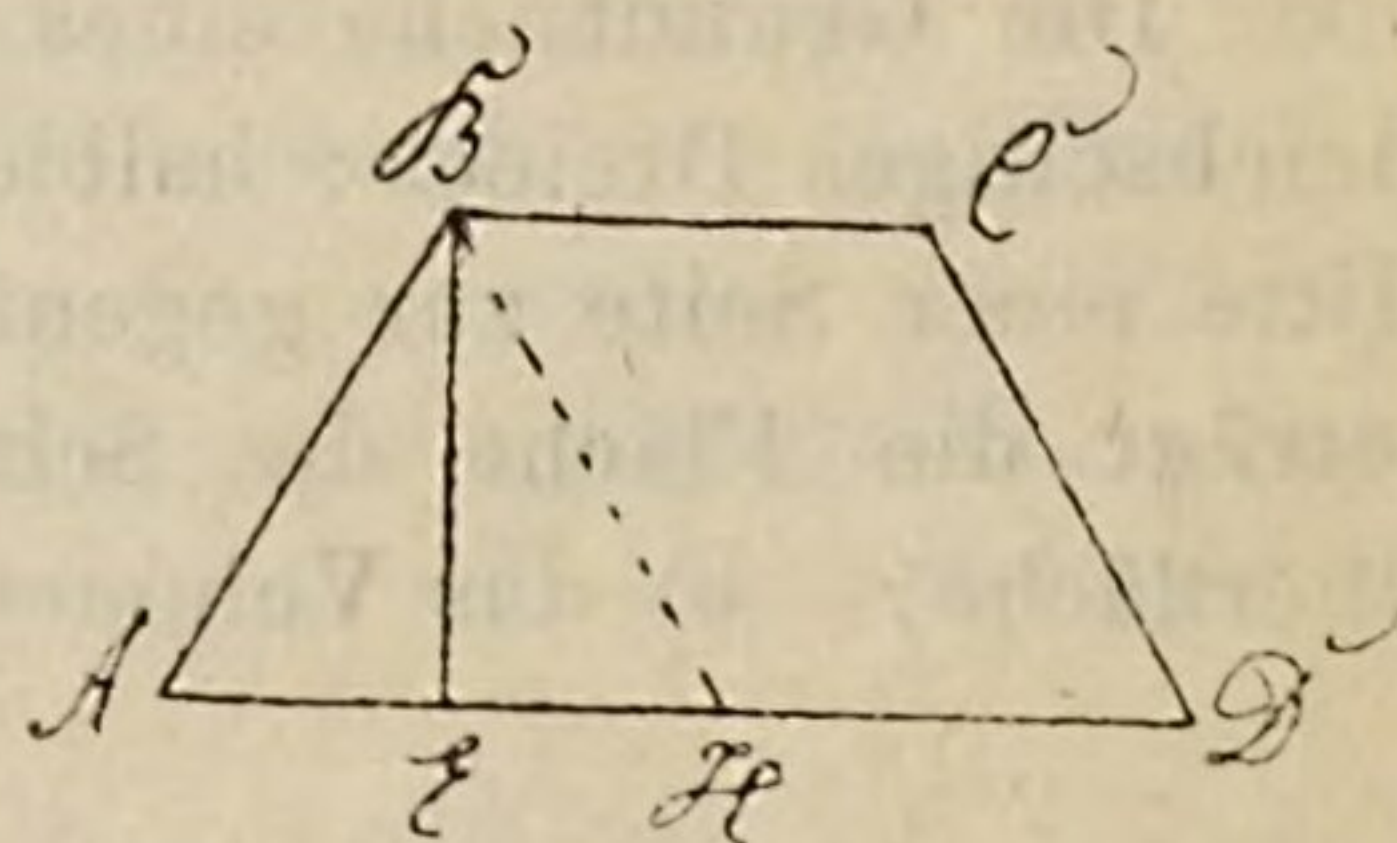


Fig. 8.

Lösung.

I. Ein Stück Damm ist ein senkrechtes Prisma (Fig. 7), dessen Grundfläche der Querschnitt (ABCD Fig. 8) des Dammes und dessen Höhe 1 m ist.

II. Zieht man im Paralleltapez BH $\parallel$ CD und von B aus BE $\perp$ AD, so ist $AE = \frac{1}{2} AB$.

$$\text{III. } \overline{AB}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{BE}^2$$

$$\frac{3}{4} \overline{AB}^2 = \overline{BE}^2$$

$$\text{Inhalt des Dreieckes ABH} = \frac{\overline{AB}^2}{4} \sqrt{3} = \frac{1}{3} \overline{BE}^2 \sqrt{3} = \frac{1}{3} (64)^2 \times 1,732.$$

IV. Die Fläche des Rhomboides ist $BC \times BE = 5,3 \times 6,4$.

V. Die Fläche des Trapezes ist

$$\frac{1}{3} \times (6,4)^2 \sqrt{3} + 5,3 \times 6,4 = 6,4 (3,6949 + 5,3) = 57,567 \text{ qm.}$$

VI. Der Kubikinhalt eines Prismas, dessen Grundfläche 57,567 qm und dessen Höhe 1 m ist, beträgt **57,567 cbm.**

Antwort: Das laufende Meter des Bahndammes enthält **57,567 cbm.**

4. Unterfranken. 1895.

Ein nach allen Seiten gleichmäßig abfallender Eisenbahndamm ist oben 4,2 m breit und jede der beiden Seitenflächen 4,4 m hoch. Der Böschungswinkel ist 60°. Wie viele Kubikmeter Inhalt hat das laufende Meter?

Lösung.

I. Das Dreieck ABH (Fig. 8) hat den Flächeninhalt

$$\frac{AB^2}{4} \sqrt{3} = \frac{4,4 \times 4,4}{4} \times \sqrt{3} = 4,4 \times 1,1 \times \sqrt{3}.$$

II. Die Fläche des Rhomboides BCDH ist $BC \times BE = BC \times \frac{AB}{2} \sqrt{3}$
 $= \frac{4,2 \times 4,4 \times \sqrt{3}}{2}$

III. Die Fläche des Paralleltrapezes ist $4,4 \times 1,1 \times \sqrt{3} + 2,1 \times 4,4 \sqrt{3}$
 $= 4,4 \times 3,2 \times 1,732 = 24,387 \text{ qm.}$

IV. Der Kubikinhalt eines 1 m langen Dammstückes beträgt
24,387 cbm.

Antwort: Der Inhalt des laufenden Meters ist **24,387 cbm.**

5. Pfalz. 1894.

Die Summe der Höhe und Grundkante eines senkrechten quadratischen Prismas ist 18 cm, die Oberfläche beträgt 504 qcm. Aus diesem Prisma soll das größtmögliche sechsseitige mit regulärer Grundfläche gemacht werden. Was geht am Volumen verloren, und wie groß ist die Oberfläche des sechsseitigen Prismas?

Lösung.

A. I. Bezeichnet man die Länge der Grundkante (AD Fig. 9) mit x m, die Höhe mit y m, so ist $x + y = 18$.

II. Jede Grundfläche ist x^2 und jede Seitenfläche xy, daher die Oberfläche (O)

$$O = 2x^2 + 4xy = 504$$

$$x^2 + 2xy = 252$$

III. Zur Bestimmung von x und y dienen nun die Gleichungen

$$\text{I} \quad x + y = 18$$

$$\text{II} \quad x^2 + 2xy = 252$$

$$\text{III} = 2x \times \text{I} \quad 2x^2 + 2xy = 36x$$

$$\text{IV} = \text{III} - \text{II} \quad x^2 = 36x - 252$$

$$x^2 - 36x = -252$$

$$x^2 - 36x + (18)^2 = 324 - 252$$

$$(x - 18)^2 = 72$$

$$x = 18 \pm 6\sqrt{2}$$

$$x = 9,516 \text{ cm}$$

$$y = 8,484 \text{ cm.}$$

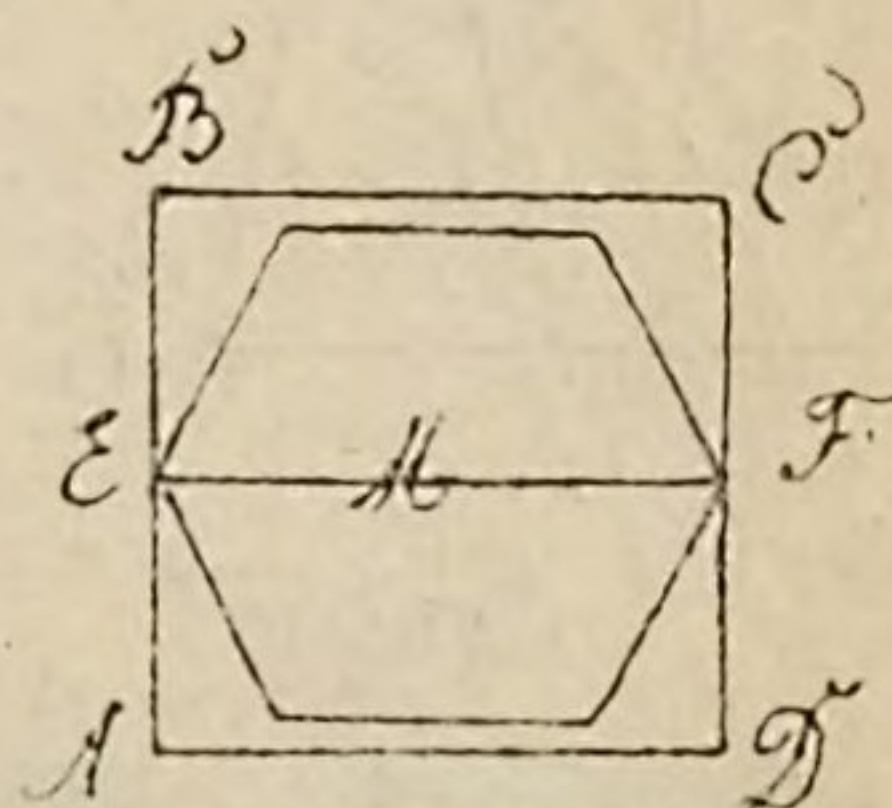


Fig. 9.

B. I. Der Radius (und die Sechseckseite) ist $EM = \frac{9,516}{2}$ cm.

II. Der Flächeninhalt des Sechseckes ist $\frac{3}{2} \times \frac{(9,516)^2}{4} \times 1,732$ qcm.

C. Der Verlust an Volumen (D) beträgt

$$D = (9,516)^2 \times 8,484 - \frac{3}{2} \times (9,516)^2 \times 1,732 \times 8,484 = 269,276 \text{ ccm.}$$

D. Die Oberfläche (O) des sechsseitigen Prismas ist

$$O = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{(9,516)^2}{4} \times 1,732 + 6 \times \left(\frac{9,516}{2} \right) \times 8,484$$

$$O = 3 \times (9,516)^2 \times 0,433 + 3 \times 9,516 \times 8,484 = 359,83 \text{ qcm.}$$

Antwort: a) Am Volumen gehen **269,276 ccm** verloren. b) Die Oberfläche des sechsseitigen Prismas beträgt **359,83 qcm**.

Pyramiden.

4. Mittelfranken. 1887.

Die größte ägyptische Pyramide bei Gizeh in der Nähe von Kairo hatte vor der Versandung eine 233 m lange und breite Grundfläche und eine Höhe von 146 m. Wie groß ist die Oberfläche und das Volumen der Steinmasse, aus welcher die Pyramide besteht?

Lösung.

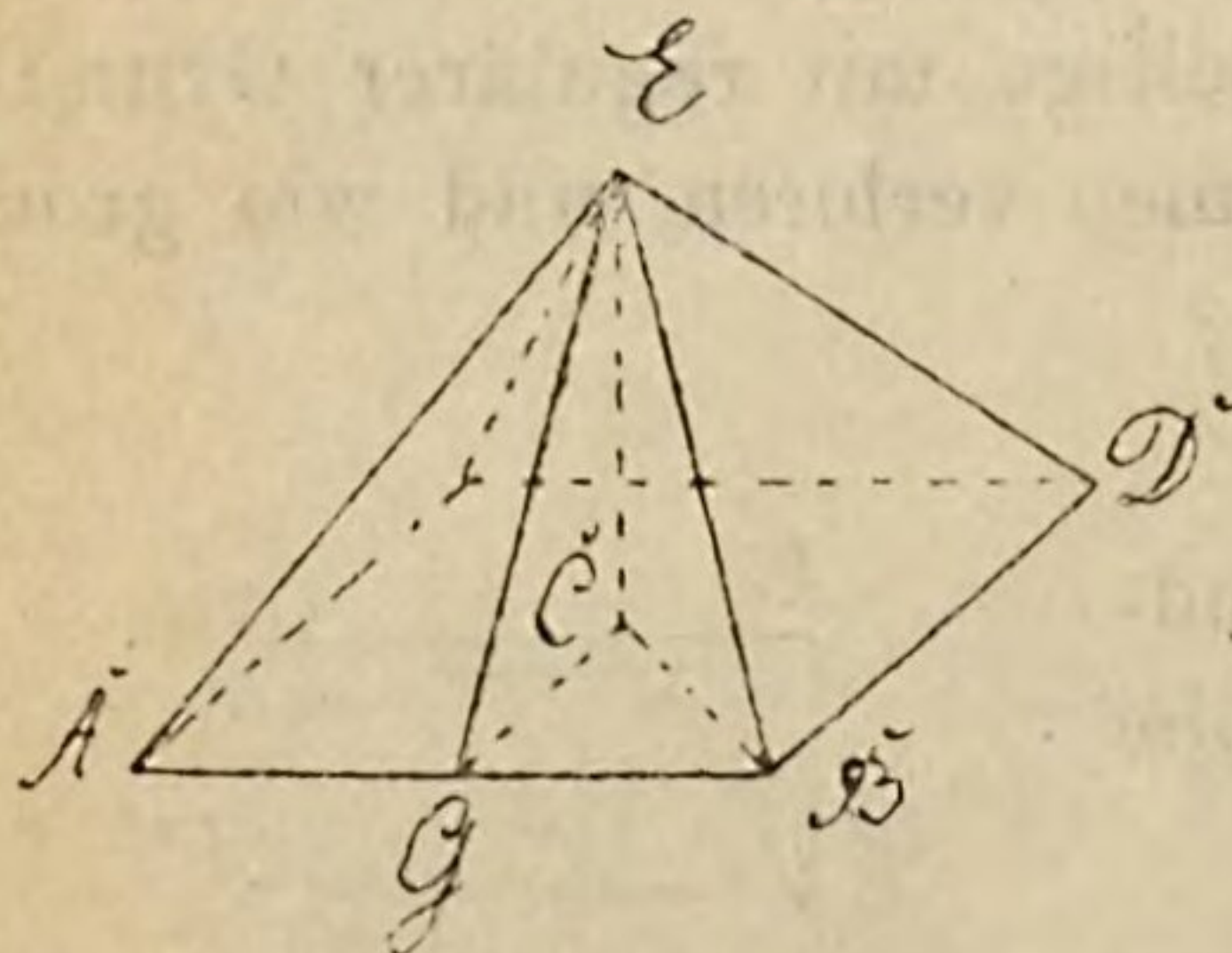


Fig. 10.

A. I. GC (Fig. 9) $= \frac{1}{2} BD = 116,5$ m und EC $= 146$ m, daher

$$EG = \sqrt{(116,5)^2 + (146)^2} = 186,78 \text{ m.}$$

II. Die Oberfläche (O) ist

$$O = \frac{4 \times 233 \times 186,78}{2} = 87039,48 \text{ qm.}$$

B. Das Volumen der Steinmasse (V) enthält

$$V = \frac{233 \times 233 \times 146}{3} = 2642064,667 \text{ cbm.}$$

Antwort: Die Oberfläche der Pyramide enthält **87039,48 qm**, und das Volumen der Steinmasse ist **2642064,667 cbm**.

2. Unterfranken. 1894.

Das Dach eines Kirchturmes, eine senkrechte vierseitige Pyramide mit quadratischer Basis darstellend, soll mit Schiefer bedeckt werden. Die Kante der Grundfläche mißt 5 m, die Höhe der Pyramide 6 m.

a) Wie stellt sich die Rechnung, wenn 1 qm fertiges Schieferdach mit 3,20 $\mathcal{M}$ berechnet wird? b) Wie viel beträgt die Barzahlung, wenn die Schuld nach 9 Monaten berichtigt werden sollte, aber schon nach 3 Monaten mit 6% jährlichem Diskonto beglichen wird?

A. I. GC (Fig. 10) = $\frac{5}{2} = 2,5$ m und EC = 6 m, daher

$$GE = \sqrt{6,25 + 36} = 6,5 \text{ m}$$

II. Die Oberfläche (O) des Turmes enthält

$$O = 4 \times \frac{5 \times 6,5}{2} = 65 \text{ qm.}$$

B. Die Rechnung lautet auf $65 \times 3,2 = 208$ M.

C. Die Barzahlung beträgt $208 - 208 \times \frac{0,5}{100} \times 6 = 201,76$ M.

Antwort: a) Der Rechnungsbetrag ist 208 M, wofür b) 201,76 M bezahlt werden.

3. Oberpfalz. 1894.

Eine gerade Pyramide mit quadratischer Basis hat 1000 qm Oberfläche. Eine Grundkante verhält sich zu einer Seitenkante derselben wie 1:3. Wie groß ist eine Grundkante? Wie groß eine Seitenkante? (Zwischenresultate können abgerundet werden.)

Lösung.

I. Die Oberfläche der Pyramide (O) ist

$$O = \overline{AB}^2 + 4 \triangle ABE \text{ (Fig. 10)}$$

II. $AB = x$ m somit $\overline{AB}^2 = x^2$

$$\text{III. } \triangle ABE = \sqrt{3,5x \times 0,5x \times 0,5x \times 2,5x} = \frac{x^2}{100} \sqrt{35 \times 5 \times 5 \times 25} = \frac{x^2}{4} \sqrt{35}$$

$$\text{IV. } 4 \times \triangle ABE = 4 \times \frac{x^2}{4} \sqrt{35} = x^2 \sqrt{35} = 5,910 x^2$$

V. $O = x^2 + 5,916 x^2$. Somit

$$\text{VI. } x^2 + 5,916 x^2 = 1000 \text{ qm.}$$

$$x^2 = \frac{1000}{6,916} = 144,5922 \text{ qm.}$$

$$x = 12,024 \text{ cm}$$

$$3x = 36,072 \text{ cm.}$$

Antwort: Die Länge der Grundkante ist 12,024 cm, der Seitenkante 36,072 cm.

4. Pfalz. 1894.

Welche Höhe ist derjenigen geraden, vierseitigen Pyramide zu geben, welche bei 17,7744 qm Oberfläche einen Umfang der regulären Basis von 6,72 m haben soll?

Lösung.

I. Bezeichnet man $AB = x$ m (Fig. 10), so ist

$$4x = 6,72 \text{ m}$$

$$x = 1,68 \text{ m die Grundkante.}$$

II. Die Oberfläche (O) besteht aus der Grundfläche $= (1,68)^2 = 2,8224$ qm und den 4 Seitendreiecken.

III. Die Fläche jeder Seite $\frac{17,7744 - 2,8224}{4} = 3,738$ qm.

IV. Nun ist $\frac{1,68 \times GE}{2} = 3,738$, daher die Seitenhöhe $GE = 4,45$ m.

V. $EC = \sqrt{GE^2 - (0,84)^2} = \sqrt{5,29 \times 3,61} = \sqrt{19,0969} = 4,37$ m.

Antwort: Die Pyramide muß eine Höhe von **4,37 m** erhalten.

3. Unterfranken. 1891.

Wie groß ist der Radius desjenigen Kreises, der um die quadratische Grundfläche einer Pyramide so gelegt wird, daß die Ecken in die Peripherie fallen? Der Inhalt der Pyramide hat 1632 ccm, die Höhe mißt 64 cm. (3 Dezimalstellen!)

Lösung.

Zuerst wird die Größe der Grundfläche bestimmt, sodann der Radius des umschriebenen Kreises (BC Fig. 11) berechnet.

$$I. \frac{\overline{AB}^2 \times 64}{3} = 1632$$

$$\overline{AB}^2 = 25,5 \times 3.$$

$$II. 2 \times \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = 25,5 \times 3$$

$$BC = \sqrt{25,5 \times 1,5} = 1,5 \sqrt{17} = 1,5 \times 4,1231 = 6,1846 \text{ m.}$$

Antwort: Der Radius des um die quadratische Grundfläche beschriebenen Kreises ist **6,1846 m** lang.

4. Unterfranken. 1887. und 4. Schwaben. 1891.

Eine 8,7 m hohe vierseitige Pyramide hat einen Inhalt von 139,2 cbm. Wie groß sind die Seiten der rechtwinkligen Grundfläche, wenn sich dieselben wie $1 : 1\frac{1}{3}$ verhalten?

Lösung.

I. Wenn $BD = x$ m (Fig. 11) hat, so ist $AB = \frac{4}{3}x$ m lang. Der Ausdruck für die Grundfläche ist dann $\frac{4}{3}x^2$.

$$II. \frac{4}{3}x^2 \times \frac{8,7}{3} = 139,2$$

$$x^2 = 4 \times 9$$

$$x = 2 \times 3 = 6 \text{ m.}$$

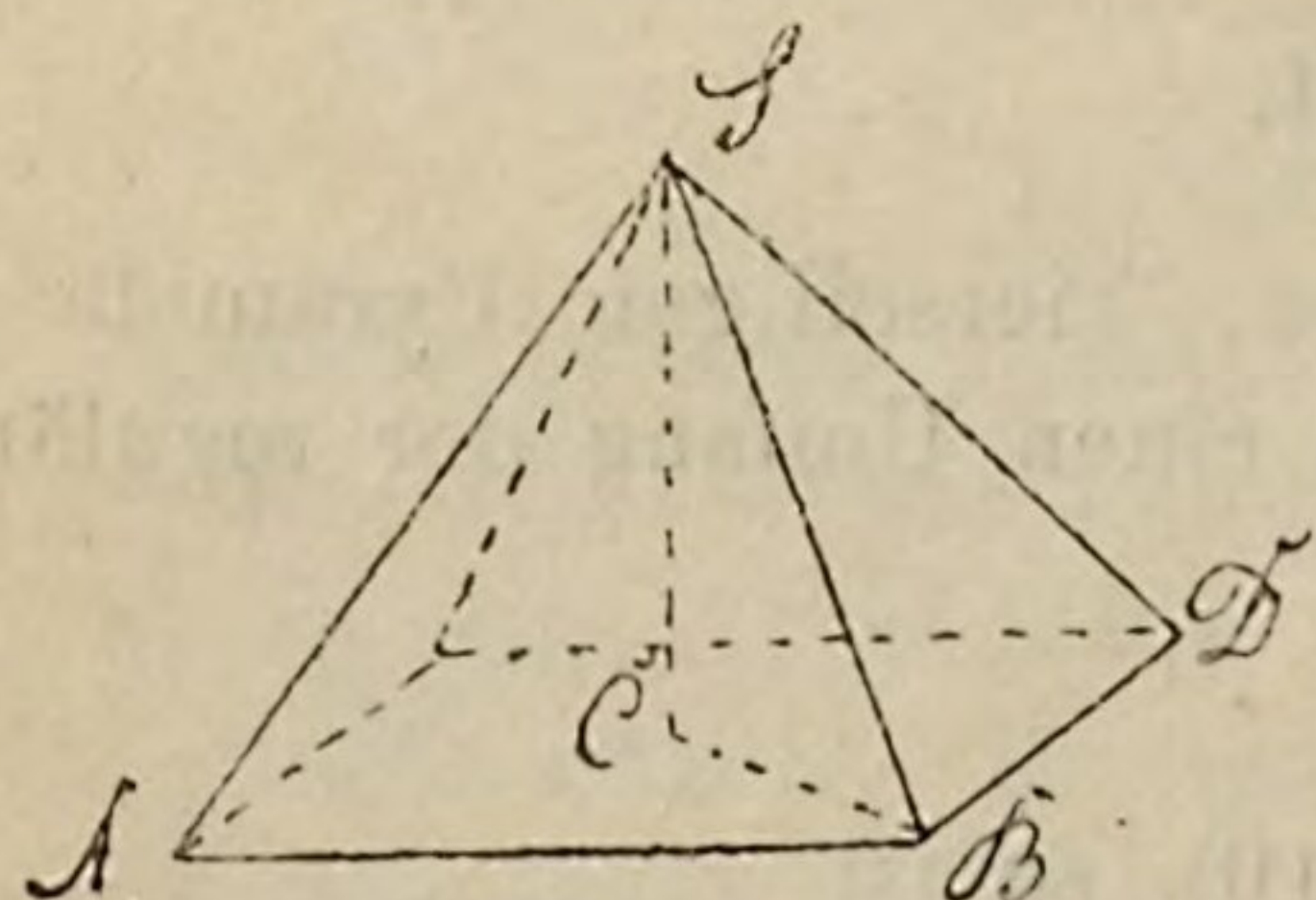


Fig. 11.

Antwort: Die eine Rechteckseite ist **6 m**, die andere **8 m** lang.

4. Unterfranken. 1893.

Jede der 6 Kanten einer dreiseitigen Pyramide mißt 4,4 m. Wie groß ist die Oberfläche?

Lösung.

Die Pyramide ist ein reguläres Tetraëder (Fig. 12) von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Die Oberfläche (O) ist daher

$$O = 4 \times \frac{(4,4)^2}{4} \sqrt{3}$$

$$O = 19,36 \times 1,732 = 33,5315 \text{ qm.}$$

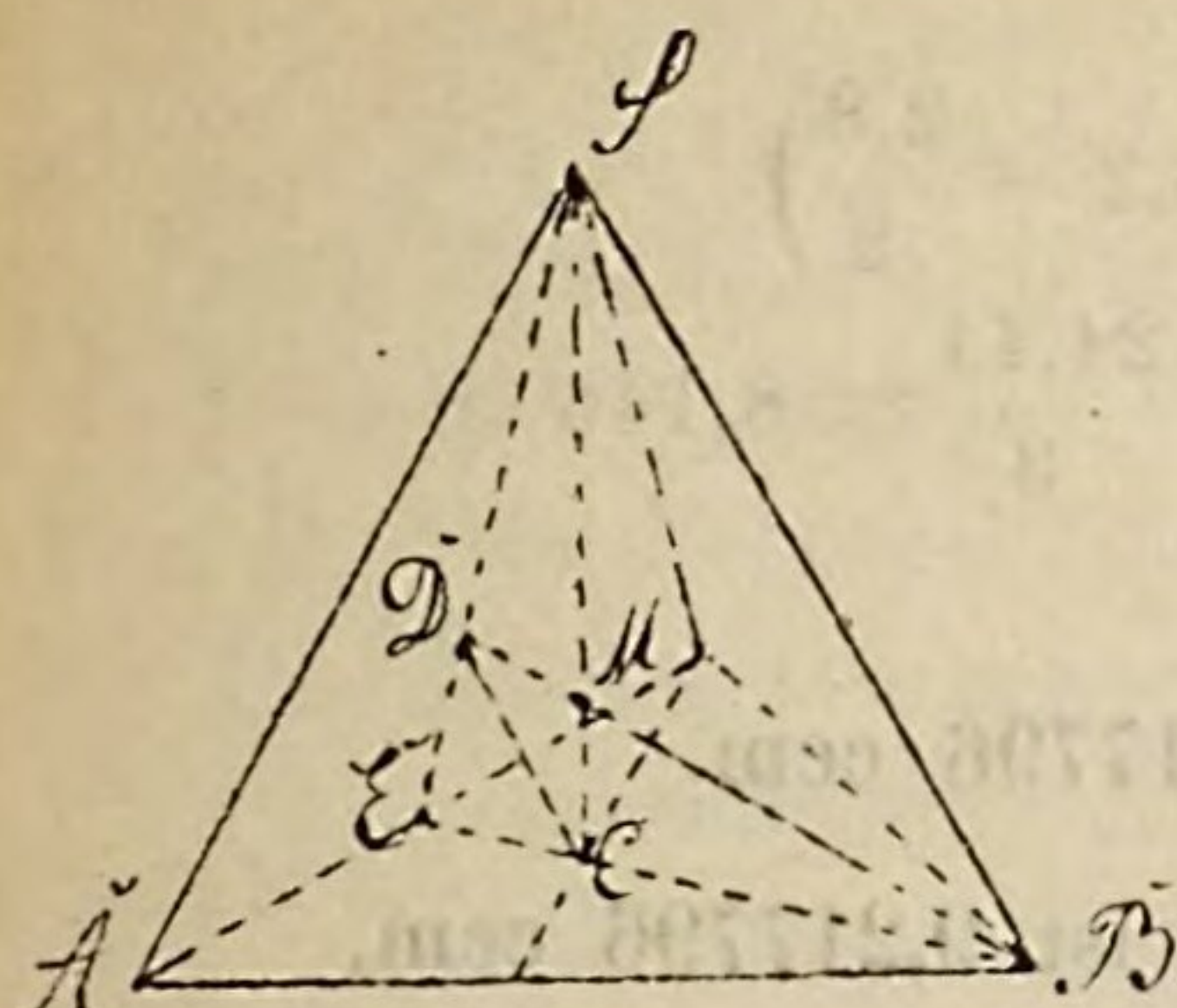


Fig. 12.

4. Schwaben. 1895.

Wie groß ist der kubische Inhalt einer regelmäßig dreiseitigen Pyramide, wenn der Umfang der Grundfläche 8,4 m und jede Seitenkante 8,2 m lang ist?

Lösung.

- I. Da die Kante der Grundfläche (Fig. 13) 2,8 m ist, so kann die Basis der Pyramide leicht berechnet werden.
- II. Um die Höhe (CS) zu finden, muß man zuerst AC d. i. den Radius des umschriebenen Kreises oder dessen Quadrat $(AC)^2$ suchen.
- III. Sobald dieser gefunden ist, kann CS als Kathete des rechtwinkligen Dreieckes ASC leicht bestimmt werden.

Ausführung.

- I. Die Grundfläche (F) ist

$$\frac{(2,8)^2}{4} \sqrt{3} = 0,7 \times 2,8 \times 1,732 = 3,39472 \text{ qcm.}$$

$$\text{II.} \quad (AC)^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2$$

$$3(AC)^2 = AD^2$$

$$(AC)^2 = \frac{(2,8)^2}{3}$$

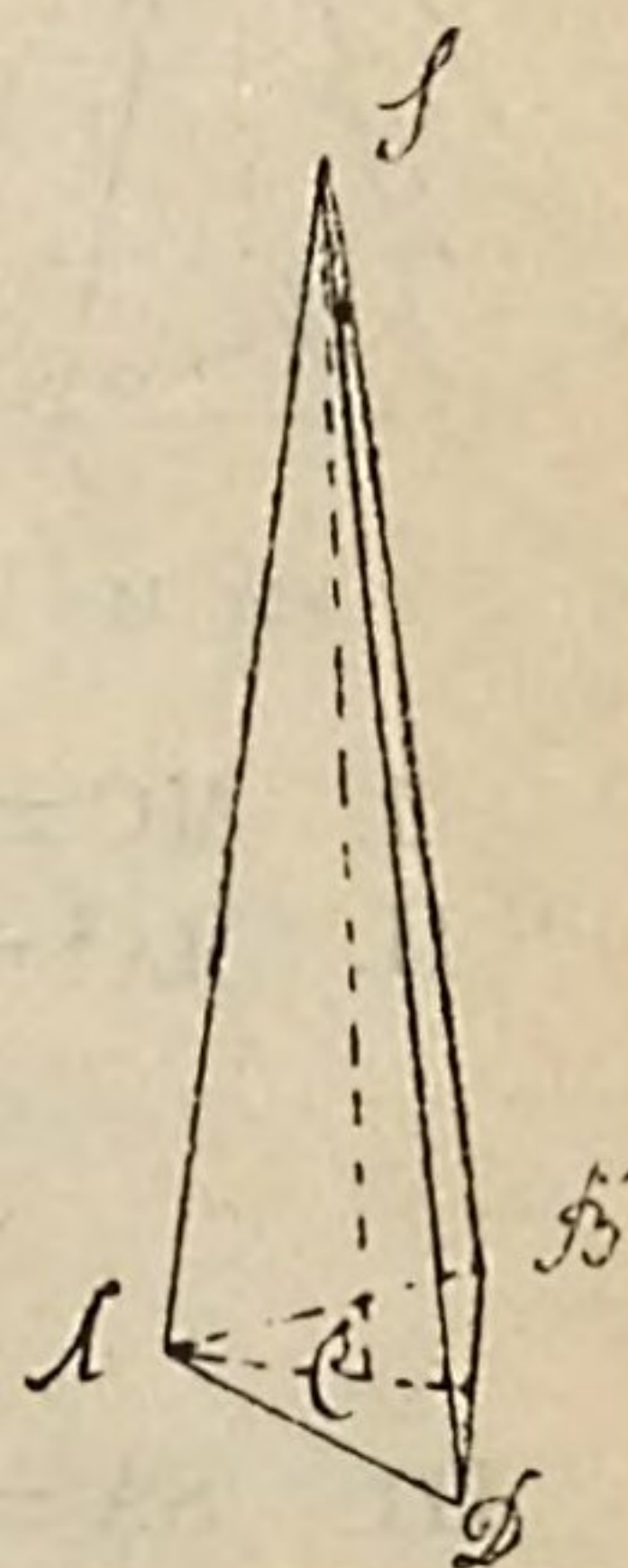


Fig. 13.

$$\begin{aligned} \text{III.} \quad & (SC)^2 = (AS)^2 - (AC)^2 \\ & SC = \sqrt{(8,2)^2 - \frac{(2,8)^2}{3}} \\ & SC = \sqrt{\left(8,2 + \frac{2,8}{3}\right) \left(8,2 - \frac{2,8}{3}\right)} \\ & SC = \frac{1}{3} \sqrt{27,4 \times 21,8} = \frac{24,44}{3} = 8,146 \text{ m.} \end{aligned}$$

III. Der Inhalt der Pyramide (V) ist

$$V = \frac{3,39472 \times 8,146}{3} = 9,217796 \text{ ccm.}$$

Antwort: Der kubische Inhalt der Pyramide ist 9,217796 ccm.

1. Oberpfalz. 1892.

An einer senkrechten Pyramide mit einer regulär sechsseitigen Grundfläche mißt die Höhe des Körpers 40 cm und die Höhe einer Seitenfläche 41 cm. Zu suchen ist: a) Die Länge der Grundkante; b) Die Länge einer Seitenkante.

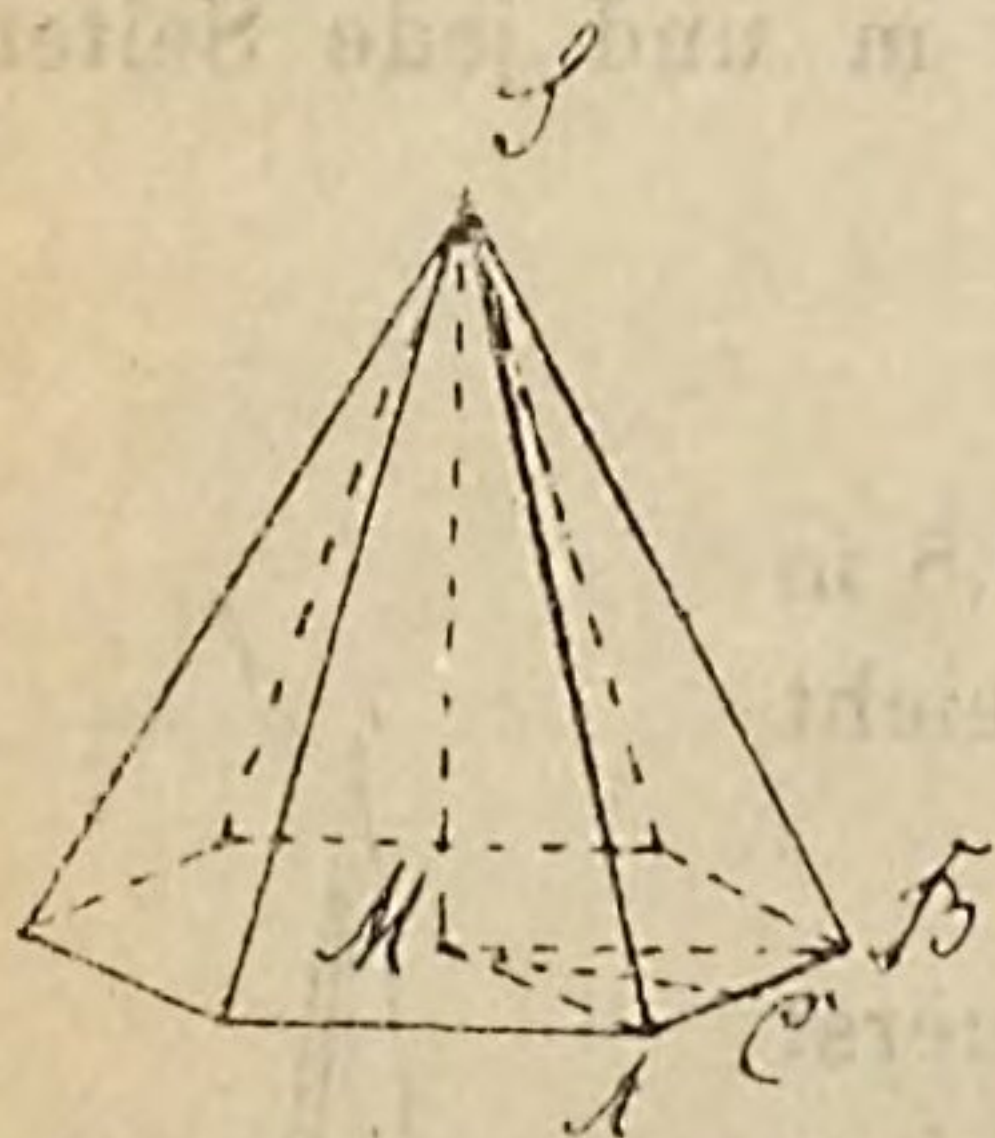


Fig. 14.

Lösung.

- I. Gegeben sind (Fig. 14) SC und SM; man kann daher MC suchen.
- II. Ist MC bekannt, so wird AC und AM $= 2 AC$ bestimmt.
- III. Ist MA gefunden, so kann AS leicht berechnet werden.

Ausführung.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & MC = \sqrt{SC^2 - SM^2} = \sqrt{(41)^2 - (40)^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ cm.} \\ \text{II.} \quad & MA^2 - AC^2 = MC^2 \\ & 3 AC^2 = MC^2 = 81 \\ & AC = \sqrt{27} = 3 \sqrt{3} = 5,196 \text{ cm} \\ & AB = 2 AC = 10,392 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\text{III.} \quad SA = \sqrt{(SM)^2 + MA^2} = \sqrt{(40)^2 + 4 \times 27} = 41,328 \text{ cm.}$$

Antwort: Die Länge der Grundkante ist 10,392 cm, der Seitenkante 41,328 m.

3. Oberfranken. 1887.

Der Inhalt einer Pyramide, deren Grundfläche ein reguläres Sechseck ist, beträgt 140,292 ccm. Wenn die Höhe derselben so groß ist wie der Umfang der Grundfläche, welche Oberfläche hat dann die Pyramide?

Lösung.

- I. Da weder die Größe der Grundfläche noch der Höhe, dagegen der körperliche Inhalt gegeben ist, so wird ein Ausdruck für die Grundfläche und Höhe gesucht. Beträgt die Seite der Grundfläche (Fig. 14) x m, so ist der Umfang oder die Pyramidenhöhe $6x$.
- II. Der Ausdruck für die Grundfläche ist $\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}$.
- III. Ist die Grundkante (x) gefunden, so wird der Radius des eingeschriebenen Kreises oder die Höhe (MC) des regulären Dreiecks, welches die Grundkante zur Seite hat, berechnet.
- IV. Aus den gefundenen Größen für SM und MC wird die Höhe eines Seitendreiecks (SC) bestimmt.
- V. Schließlich werden die Seitendreiecke berechnet und zur Grundfläche addiert.

Ausführung.

- I. Ist $AB = x$, so ist $SM = 6x$.
- II. Der Ausdruck für das Volumen der Pyramide ist $\frac{3}{2}x^2\sqrt{3} \times \frac{6x}{3}$

Nun ist

$$\frac{3}{2}x^2\sqrt{3} \times \frac{6x}{3} = 140,292$$

$$x^3 = \frac{46,764}{1,732} = 27$$

$$x = 3 \text{ cm.}$$

- III. Der Flächeninhalt (F) der Grundfläche ist $\frac{3}{2}x^2\sqrt{3} = \frac{140,292}{6} = 23,382 \text{ qcm.}$

$$\text{IV. } MC = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - (1,5)^2} = \sqrt{6,75} = 2,598 \text{ cm.}$$

$$\text{V. } SC = \sqrt{(MC)^2 + (SM)^2} = \sqrt{6,75 + (18)^2} = 18,186 \text{ cm.}$$

$$\text{V. Das Dreieck ASB} = \frac{3 \times 18,186}{2} = 27,279 \text{ qcm.}$$

$$\text{VI. Die Oberfläche hat } 23,382 + 6 \times 27,279 = 187,056 \text{ qcm.}$$

Abgekürzte Pyramide (Pyramidenstumpf).

4. Oberpfalz 1889, dann 3. 1895 und 5. 1891.

Zu entwickeln die Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfes; gegeben ist die Höhe (h) des Stumpfes und die Grundflächen F und f .

Lösung.

- I. Das Volumen des Pyramidenstumpfes (V) ist so groß, wie der Unterschied der Pyramide ABS und der Ergänzung abS,
 II. Um das Volumen derselben zu finden, muß $Sc = x$, die Höhe der Ergänzungspyramide gefunden werden.
 III. Die Flächen AB und ab verhalten sich, wie die Quadrate der Entfernungen von der Spitze, also

$$F : f = (h + x)^2 : x^2$$

$$\sqrt{F} : \sqrt{f} = (h + x) : x$$

$$(\sqrt{F} - \sqrt{f}) : \sqrt{f} = h : x$$

$$x = \frac{h \sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}$$

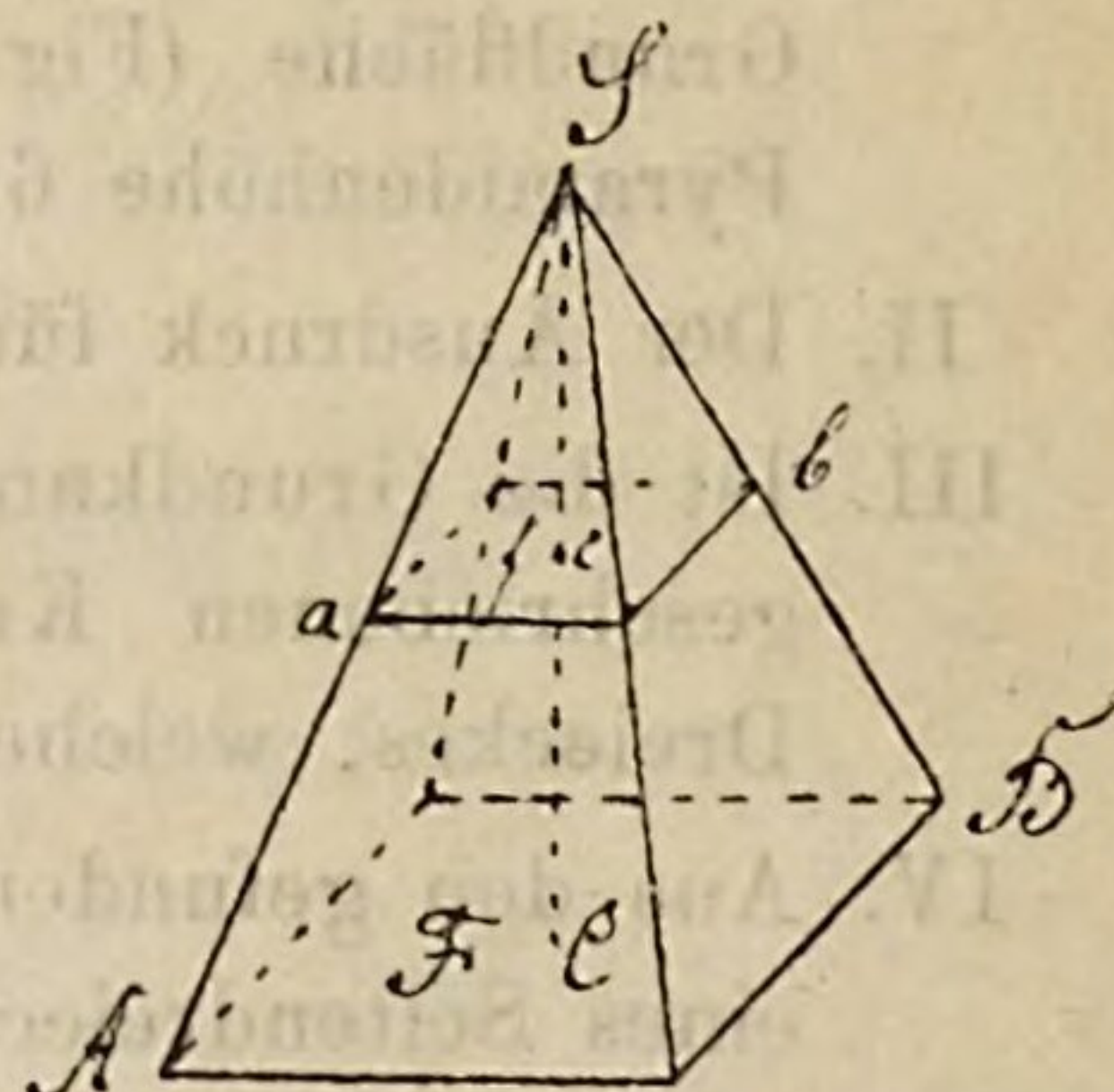


Fig. 15.

$$\text{IV. } V = \frac{F(h+x)}{3} - \frac{fx}{3} = \frac{Fh + (F-f)x}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \left[Fh + \frac{(F-f) h \sqrt{f}}{(\sqrt{F} - \sqrt{f})} \right] = \frac{h}{3} \left[F + \frac{(F-f)}{(\sqrt{F} - \sqrt{f})} \sqrt{f} \right]$$

Da $F-f = (\sqrt{F} + \sqrt{f})(\sqrt{F} - \sqrt{f})$, so ist*)

$$\text{V. } V = \frac{1}{3} h \left[F + \frac{(\sqrt{F} + \sqrt{f})(\sqrt{F} - \sqrt{f}) \sqrt{f}}{(\sqrt{F} - \sqrt{f})} \right]$$

$$V = \frac{h}{3} [F + (\sqrt{F} + \sqrt{f}) \sqrt{f}]$$

$$V = \frac{h}{3} [F + \sqrt{Ff} + f]$$

Zusatz. Beim Kegelstumpf ist $F = R^2 \pi$ und $f = r^2 \pi$, daher

$$V = \frac{h}{3} [R^2 \pi + \sqrt{R^2 \pi r^2 \pi} + r^2 \pi]$$

$$V = \frac{h}{3} [R^2 \pi + R r \pi + r^2 \pi]$$

$$V = \frac{h\pi}{3} [R^2 + R r + r^2]$$

*) Statt $(F-f)$ in ein Produkt zu verwandeln, kann man auch den Nenner rational machen, so dass

$$V = \frac{1}{3} h \left[F + \frac{(F-f) \sqrt{f} \times (\sqrt{F} + \sqrt{f})}{(\sqrt{F} - \sqrt{f}) \times (\sqrt{F} + \sqrt{f})} \right]$$

$$V = \frac{1}{3} h \left[F + \frac{(F-f)(\sqrt{Ff} + f)}{(F-f)} \right]$$

$$V = \frac{1}{3} [F + \sqrt{Ff} + f]$$

4. Oberbayern. 1891.

Wie viel Liter Flüssigkeit faßt ein 1,66 m tiefer, vierseitiger Kübel in Form eines Pyramidenstumpfes mit regulärer Basis, wenn jede Seite im lichten oben 1 m, unten aber 1,33 m lang ist?

Lösung.

$$V = \frac{1,66}{3} [(1,33)^2 + 1,33 \times 1 + 1^2] \times 1000$$

$$V = \frac{1,66 \times 4098,9}{3} = 2268,058 \text{ Liter.}$$

Antwort: Der Kübel faßt 2268,058 Liter Flüssigkeit.

3. Schwaben. 1890.

Die Grundfläche einer 1,5 m hohen, geraden Pyramide bildet ein Quadrat von 60 cm Seitenlänge. In welcher Entfernung von der Spitze ist eine mit der Grundfläche parallele Ebene hindurchzulegen, um den Inhalt der Pyramide zu halbieren?

Lösung.

Wird (Fig. 16) $\overline{AB}^2 = F$, ferner $\overline{ab}^2 = f$, dann $SC = H$ und $Sc = h$ bezeichnet, so ist $\frac{fh}{3} = \frac{1}{2} \frac{FH}{3}$ oder $fh = \frac{1}{2} FH$. Nun ist

$$\text{I. } fh = \frac{(60)^2 \times 150}{2} = 270\,000$$

$$\text{II. } f : h^2 = F : H^2 = (60)^2 : (150)^2$$

$$\text{II. } f = \frac{3600 \times h^2}{150 \times 150} = \frac{4}{25} h^2$$

$$\text{III (f in I)} \quad \frac{4}{25} h^3 = 270\,000$$

$$h^3 = 25 \times 27 \times 100 \times 25 = 125 \times 125 \times 27 \times 4$$

$$h = \sqrt[3]{125 \times 125 \times 27 \times 4} = 75 \sqrt[3]{4}$$

$$h = 75 \times 1,5874 = 119,055 \text{ cm.}$$

Antwort: Die Parallelebene ist 119,055 cm von der Spitze der Pyramide entfernt durchzulegen.*)

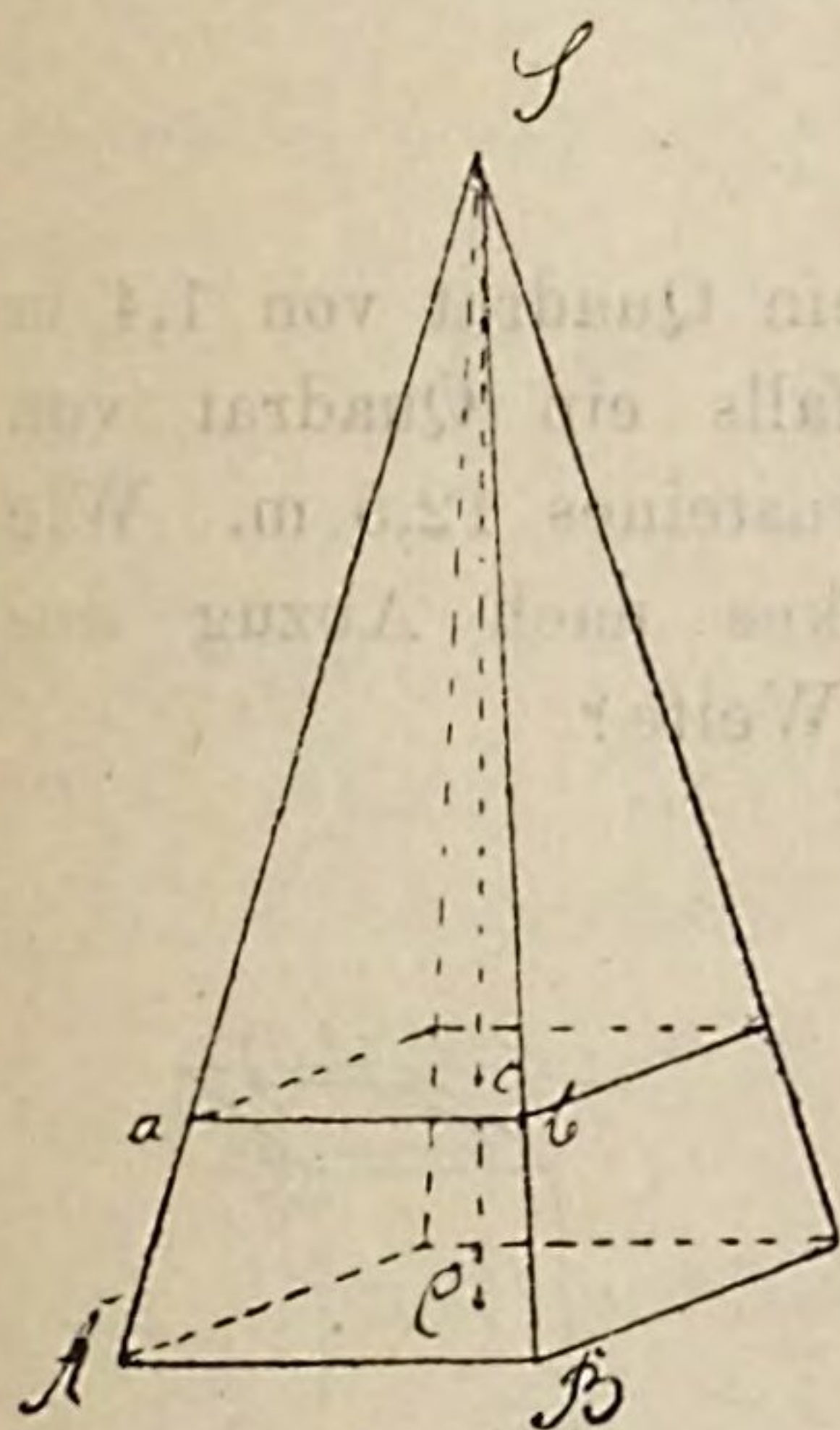


Fig. 16.

*) Die Lösung der Aufgabe: „In welcher Entfernung von der Spitze muß eine Ebene parallel zur Grundfläche gezogen werden, damit das abgeschnittene Stück der n. Teil der ganzen Pyramide ist?“ zeigt, daß weder die Form noch die Größe der Grundfläche auf das Resultat einen Einfluß hat. Es ist nämlich

$$\text{I. } \frac{fh}{3} = \frac{1}{n} \frac{FH}{3}$$

$$fh = \frac{1}{n} FH \text{ oder } f : F = \frac{1}{n} H : h$$

$$\text{II. } f : F = h^2 : H^2$$

$$\text{III. (Compar.)} \quad h^2 : H^2 = \frac{1}{n} H : h$$

$$h^3 = \frac{1}{n} H^3 = \frac{n^2}{n^3} H^3$$

$$h = \frac{H}{n} \sqrt[n]{n^2}$$

2. Schwaben. 1888.

Eine abgekürzte Pyramide mit quadratischer Grundfläche und 353,392 cbm Inhalt ist 15,6 m hoch. Wie groß ist die Seite der größeren Basis, wenn die der kleineren 3,4 m mißt?

Lösung.

Bezeichnet x m die Seite AB (Fig. 17), so ist

$$\frac{15,6}{3} [x^2 + 3,4x + (3,4)^2] = 353,392$$

$$x^2 + 3,4x + (3,4)^2 = 67,96$$

$$x^2 + 3,4x + \frac{(3,4)^2}{4} = 67,96 - \frac{3 \times 3,4 \times 3,4}{4}$$

$$(x + 1,7)^2 = 59,29$$

$$x = -1,7 \pm 7,7$$

$$x_1 = 6 \text{ m.}$$

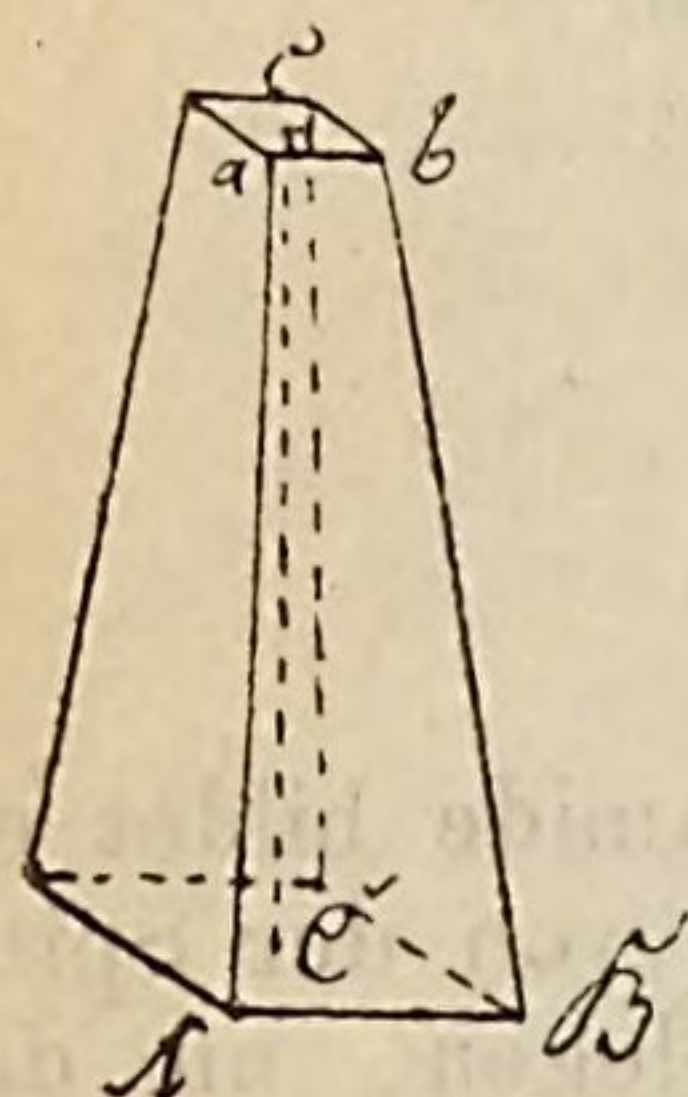


Fig. 17.

Antwort: Die Seite der größeren Basis ist 6 m.

4. Oberbayern. 1888.

Das Fundament eines Schornsteines bildet ein Quadrat von 1,4 m Seitenlänge. Oben bildet der Schornstein ebenfalls ein Quadrat von 0,6 m Breite, und es beträgt die Höhe des Schornsteines 12,5 m. Wie groß ist der körperliche Inhalt des Mauerwerkes nach Abzug des inneren Raumes von 0,44 m und 0,38 m lichter Weite?

Lösung.

I. Der körperliche Inhalt der nicht hohlen Pyramide (Fig. 18) ist

$$V = \frac{12,5}{3} [(1,4)^2 + 1,4 \times 0,6 + (0,6)^2]$$

$$V = \frac{12,5 \times 3,16}{3} = \frac{79}{6} \text{ cbm.}$$

II. Das Volumen des Hohlraumes ist

$$v = \frac{12,5}{3} [(0,44)^2 + 0,44 \times 0,38 + (0,38)^2]$$

$$v = \frac{12,63}{6}$$

III. Der körperliche Inhalt des Mauerwerkes be-

$$\text{trägt } \frac{79}{6} - \frac{12,63}{6} = \frac{66,37}{6} = 11,061666 \text{ cbm.}$$

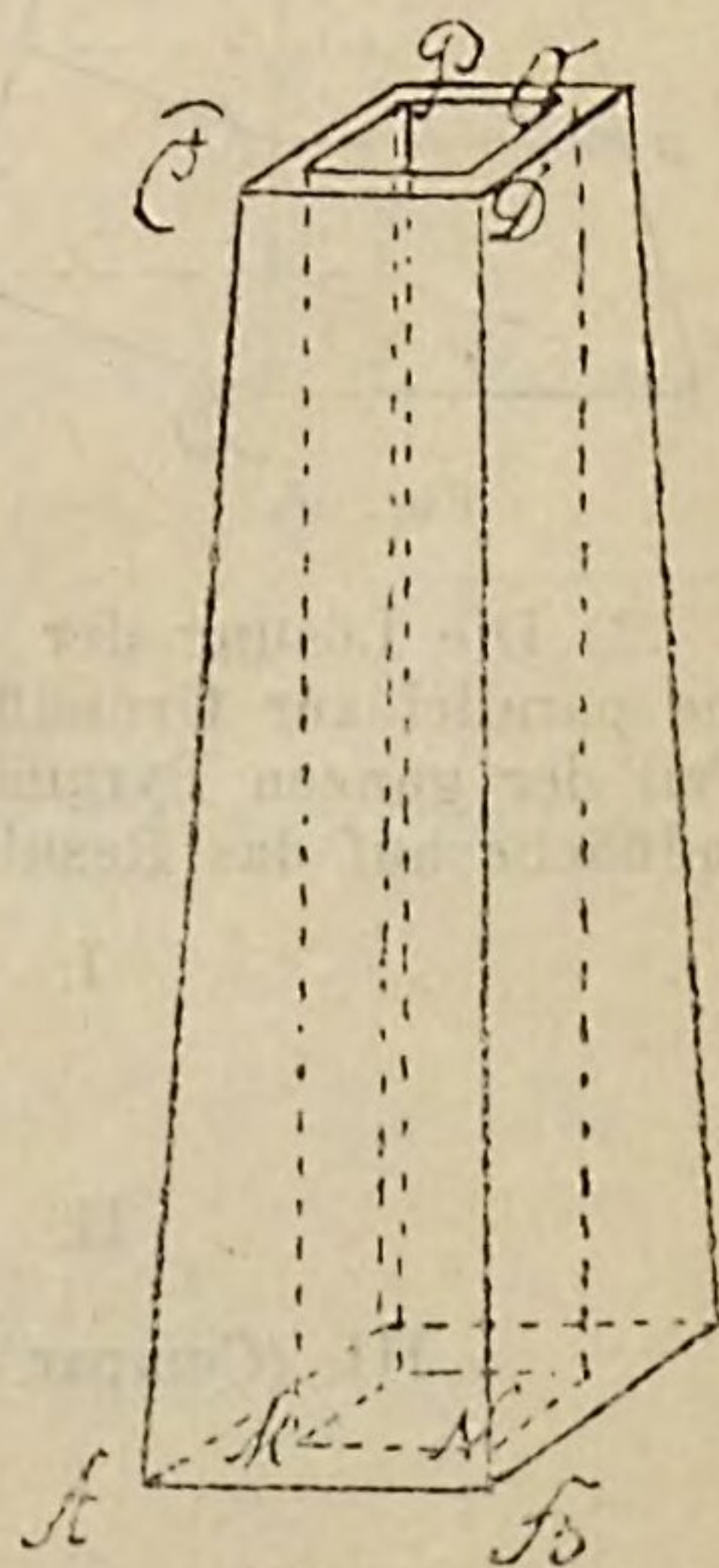


Fig. 18.

4. Oberpfalz. 1893.

Die Oberfläche eines geraden, vierseitigen Pyramidenstumpfes mit quadratischen Grundflächen beträgt 351,9 qm; die Höhe des Körpers mißt 10 m. Wie groß sind die Seiten der Grundflächen, wenn diese um 3 m differieren?

Lösung.

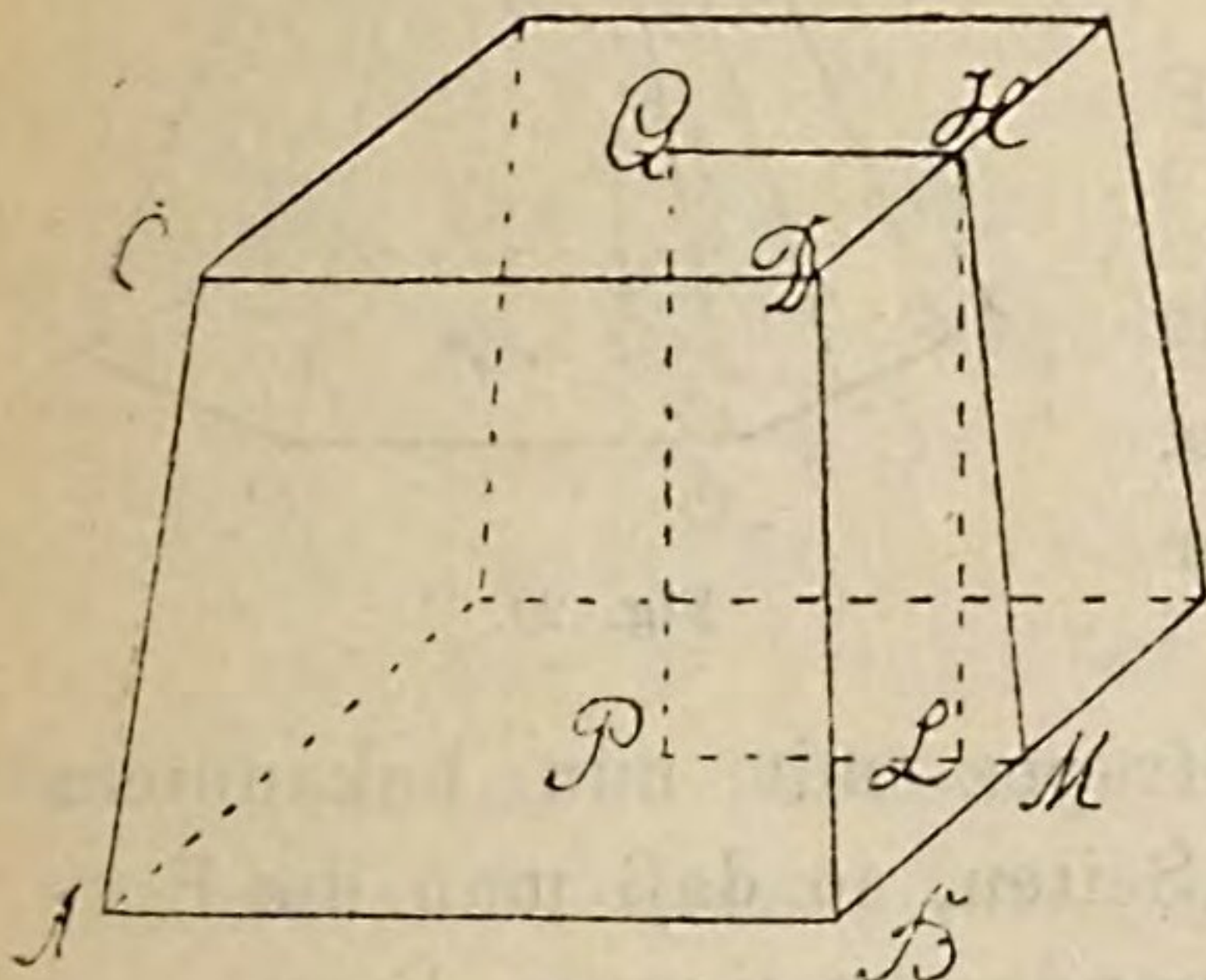


Fig. 19.

- I. Wird AB (Fig. 19) mit x bezeichnet, so ist $CD = x - 3$; ferner ist $LM = \frac{x}{2} - \frac{x-3}{2} = 1,5$ m.
- II. Da $HL = 10$ m und $LM = 1,5$ m ist, so kann HM berechnet werden.
- III. Sobald HM gefunden ist, wird der Ausdruck für die ganze Oberfläche gesucht. In diesem ist x nicht bekannt.
- IV. Da aber die Oberfläche im ganzen gegeben ist, so läßt sich x berechnen.

Ausführung.

- I. $LM = 1,5$ m.
- II. $HM = \sqrt{(HL)^2 + (LM)^2} = \sqrt{(10)^2 + (1,5)^2} = \sqrt{102,25} = 10,112$ m.
- III. Die Oberfläche (O) ist

$$O = x^2 + (x-3)^2 + \frac{(x+x-3)}{2} \times 10,112 = x^2 + x^2 - 6x + 9 + 10,112x - 15,168 = 2x^2 + 4,112x - 6,168$$
- IV. $O = 351,9$ daher

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4,112x - 6,168 &= 351,9 \\ 2x^2 + 4,112x &= 358,068 \\ x^2 + 2,056x &= 179,034 \\ x^2 + 2,056x + (1,028)^2 &= 179,034 + 1,0568 \\ x + 1,028 &= \pm \sqrt{180,0908} \\ x_1 &= 13,419 - 1,028 = 12,391 \text{ m} \\ x_1 - 3 &= 9,391 \text{ m.} \end{aligned}$$

Antwort: Die Seite des unteren Quadrates ist 12,391 m, des oberen 9,391 m.

2. Oberfranken. 1888.

Die Oberfläche eines sechsseitigen Pyramidenstumpfes mit regulären Grundflächen beträgt 2302,5 qcm; die Kanten der Boden- und

Deckfläche messen 15 bzw. 5 cm. Wie groß ist der Inhalt des Pyramidenstumpfes? (Die Formel zur Berechnung des körperlichen Inhaltes des Pyramidenstumpfes ist zu entwickeln.)

Lösung.

- I. Aus den gegebenen Randkanten lassen sich die Radien (GK und CM Fig. 20) der den Sechsecken eingeschriebenen Kreise und
- II. die Inhalte der Grundflächen F und f berechnen.
- III. Zieht man von der Oberfläche die Inhalte der Grundflächen $(F + f)$ ab, so erhält man die Inhalte der 6 Seitenflächen.
- VI. Jede Seitenfläche ist ein Parallelogramm mit nun bekanntem Inhalte und gegebenen parallelen Seiten, so daß man die Entfernung (CG) der letzteren von einander bestimmen kann.
- V. Die Pyramidenhöhe GH bildet mit der Differenz der Radien der beiden eingeschriebenen Kreise ($CM - GK = CH$) und der Seitenhöhe CG ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem GH berechnet werden kann.
- VI. Man hat nun die zur Berechnung des Inhaltes des Pyramidenstumpfes (V) erforderlichen Größen.

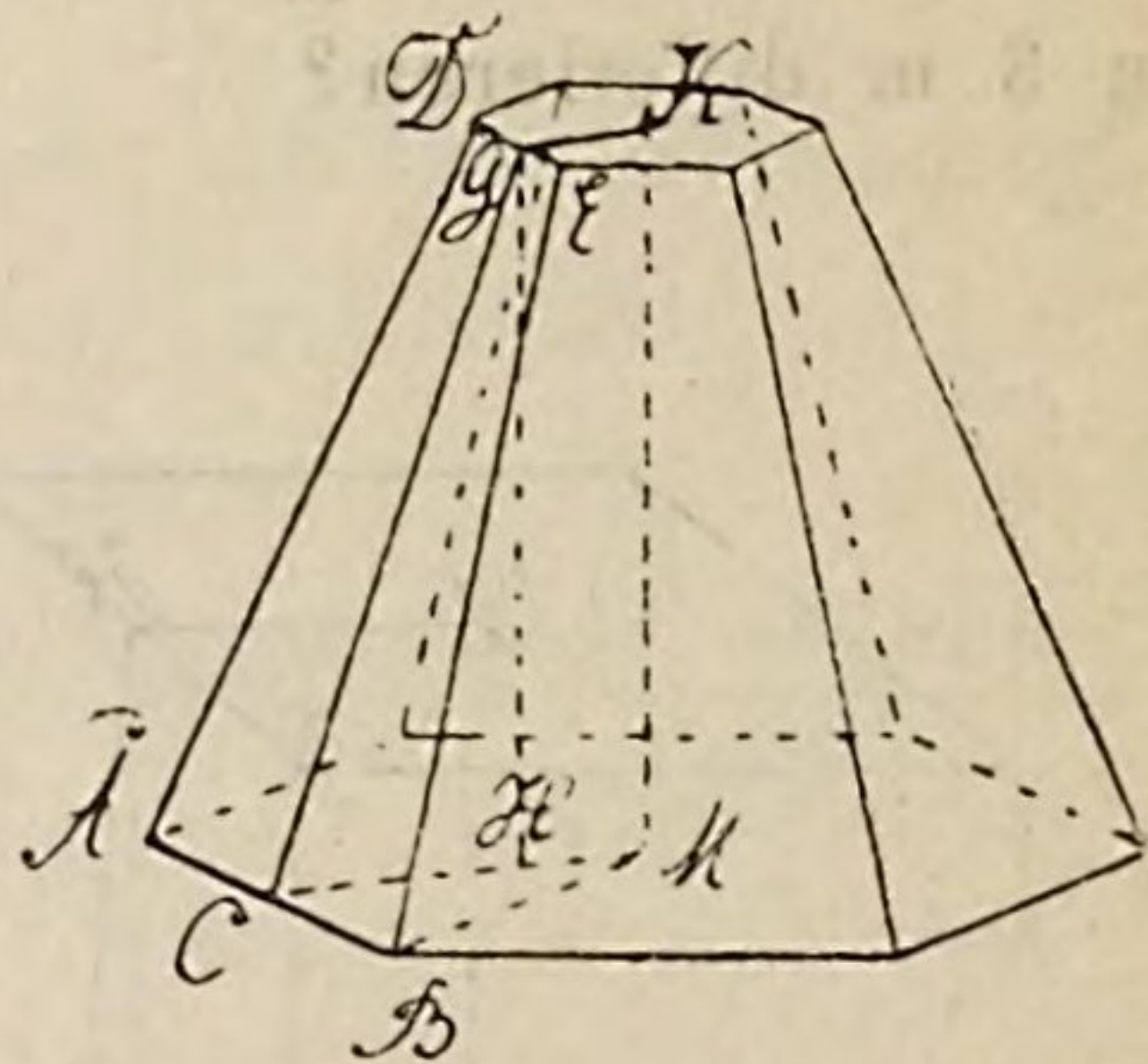


Fig. 20.

Ausführung.

- I. $CM = CB \sqrt{3} = 15 \sqrt{3}$. Da $CM : AB = GK : DE$ oder $15 \sqrt{3} : 15 = GK : 5$, so ist $GK = 5 \sqrt{3}$.
- II. $F = \frac{3}{2} \times (15)^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} \times 225 \sqrt{3}$ und $f = \frac{3}{2} \times 25 \sqrt{3}$.
- III. Der Inhalt einer Seitenfläche ist $\frac{1}{6} [2302,5 - \frac{3}{2} \times 250 \sqrt{3}] = \frac{1}{6} \times 1653 = 275,5$.
- IV. $\frac{(15 + 5)}{2} CG = 10 CG = 275,5$ daher $CG = 27,55$ cm.
- V. $GH = \sqrt{(CG)^2 - CH^2}$
 $GH = \sqrt{(27,55)^2 - [15 \sqrt{3} - 5 \sqrt{3}]^2} = \sqrt{(27,55)^2 - 75}$
 $GH = \sqrt{759,0025 - 75} = \sqrt{684,0025} = 26,15$.
- VI. $V = \frac{26,15}{3} [\frac{3}{2} \times 225 \sqrt{3} + \frac{3}{2} \times 15 \times 5 \sqrt{3} + \frac{3}{2} \times 25 \sqrt{3}]$
 $V = \frac{26,15}{3} \times \frac{3}{2} \times 325 \sqrt{3} = 7359,9175$ ccm.

Antwort: Der Inhalt des Pyramidenstumpfes beträgt 7359,9175 ccm.

5. Oberpfalz. 1885.

Die Grundfläche einer regulären, sechsseitigen, abgestumpften Pyramide hat 8 m lange, die obere Fläche 5 m lange Seiten; die Höhe mißt 12 m. Wie groß ist der Inhalt?

L ö s u n g.

- I. Der Inhalt (I) wird berechnet nach der Formel $I = \frac{h}{3}(F + \sqrt{Ff} + f)$.
- II. Der Flächeninhalt (F) der Grundfläche beträgt $F = 6 \times \frac{8^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3}{2} \times 64 \sqrt{3}$.
- III. Der Flächeninhalt (f) der Deckfläche ist $f = 6 \times \frac{5^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3}{2} \times 25 \sqrt{3}$.
- IV. Die $\sqrt{Ff} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 8^2 \sqrt{3} \times \frac{3}{2} \times 5^2 \sqrt{3}} = \frac{3}{2} \times 8 \times 5 \times \sqrt{3} = \frac{3}{2} \times 40 \sqrt{3}$.
- V. $I = 4(\frac{3}{2} \times 64 \sqrt{3} + \frac{3}{2} \times 40 \sqrt{3} + \frac{3}{2} \times 25 \sqrt{3})$
 $I = 4 \times \frac{3}{2} \times \sqrt{3} (64 + 40 + 25)$
 $I = 6 \times 1,732 \times 129 = 1340,568 \text{ cbm.}$

Antwort: Der Inhalt der abgestumpften Pyramide beträgt **1340,568 cbm.**

1. Oberpfalz. 1892.

Eine 80 cm hohe Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck von 12 cm Seitenlänge ist, wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche durchschnitten. Wie groß ist a) die Oberfläche des Pyramidenstumpfes, b) der Kubikinhalt der Ergänzungspyramide?

L ö s u n g.

- I. Die Grundfläche $F = \frac{3}{2} \times (12)^2 \times \sqrt{3} = 374,112 \text{ qcm.}$
- II. Da der Schnitt in halber Höhe gemacht wird, so sind a) die Seiten der Schnittfläche halb so groß wie die Grundkanten, somit 6 cm lang, und der Inhalt der Schnittfläche ist $f = \frac{1}{4} \times 374,112 = 93,528 \text{ qcm.}$
- A. III. Der Radius CM (Fig. 20) $= 6 \sqrt{3}$, somit GK $= 3 \sqrt{3}$ und CH $= 6 \sqrt{3} - 3 \sqrt{3} = 3 \sqrt{3}$.
- IV. GH $= \frac{1}{2} \times 80 = 40$, CG $= \sqrt{(40)^2 + 27} = 40,336 \text{ cm.}$
- V. Der Inhalt einer Seitenfläche beträgt $\left(\frac{12 + 6}{2}\right) \times 40,336 = 363,024$.
- VI. Die Oberfläche $O = 374,112 + 93,528 + 6 \times 363,024 = 2645,784 \text{ qcm.}$
- B. Der Kubikinhalt der Ergänzungspyramide v ist:

$$v = \frac{93,528 \times 40}{3} = 1247,04 \text{ ccm.}$$

Antwort: a) Die Oberfläche des Pyramidenstumpfes beträgt **2645,784 qcm**,
 b) der Kubikinhalt der Ergänzungspyramide ist **1247,04 ccm.**

Cylinder.

4. Oberbayern. 1886 und 1892.

Ein Küfer soll einen 2,66 m tiefen, cylindrischen Bottich anfertigen, der 350 hl fassen soll. Welchen Durchmesser im lichten muß der Bottich haben?

Lösung.

Der Durchmesser (AB Fig. 21) ist 2 Radien (2 r) groß. Wird $MC = h$ gesetzt, so ist

$$r^2 \pi h = 35000 \text{ Liter}$$

$$r^2 = \frac{35000}{26,6 \times 3,14}$$

$$r = \sqrt{419,0414}$$

$$r = 20,4705 \text{ dm} = 2,04705 \text{ m.}$$

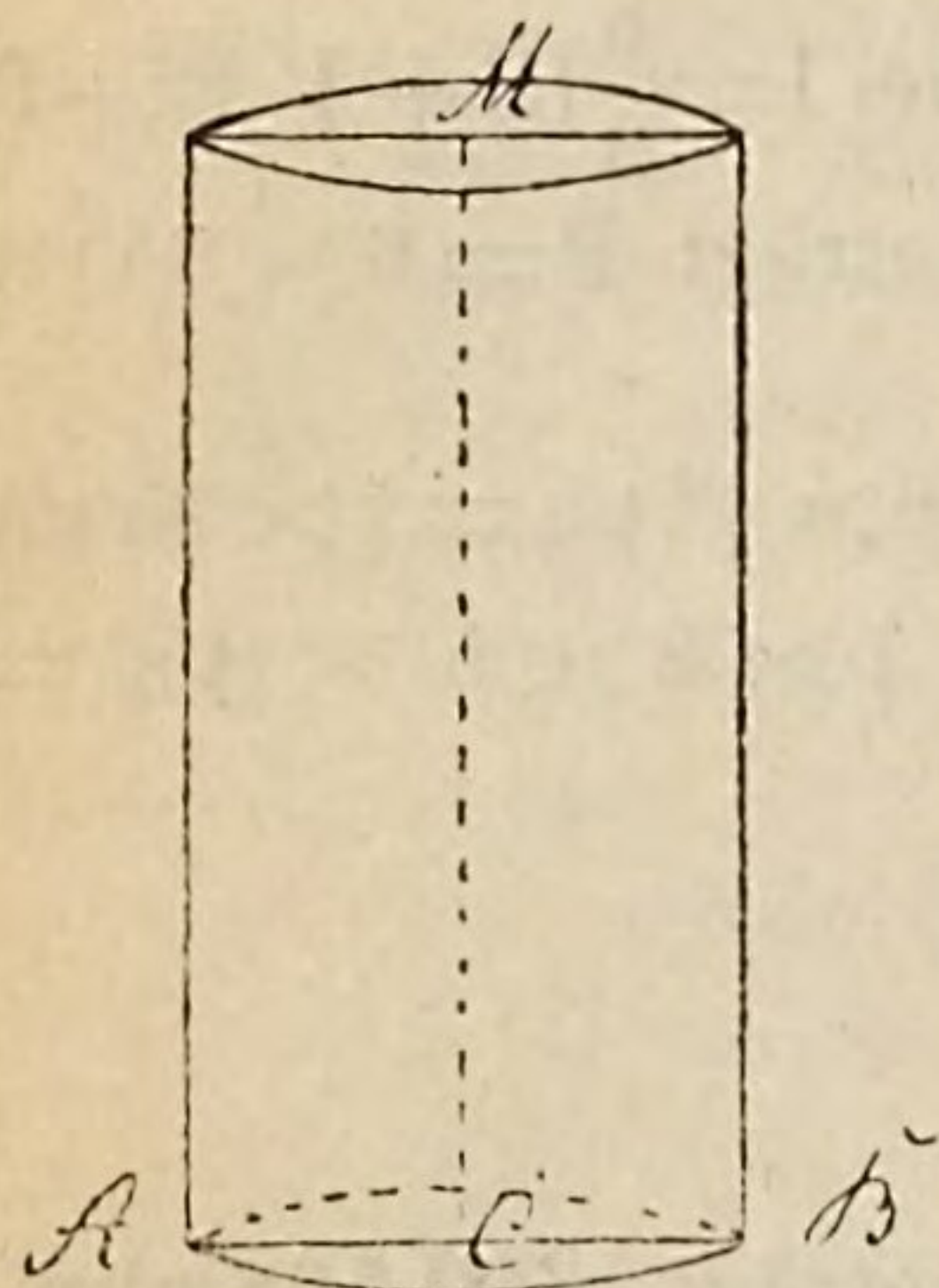


Fig. 21.

Antwort: Der Bottich muß einen Durchmesser von **4,0941 m** haben.

2. Oberpfalz. 1889.

Bei einem senkrechten Cylinder mißt die Höhe um 20 cm mehr als der Radius. Die Oberfläche des Cylinders beträgt 7536 qcm. Wie groß ist der Radius, die Höhe und der Inhalt?

Lösung.

Bezeichnet man den Radius der Grundfläche mit r (Fig. 21), so ist die Höhe $h = 20 + r$ und die Oberfläche $2r^2\pi + 2r\pi(20 + r)$.

$$\text{A. I. } 2r^2\pi + 2r\pi(20 + r) = 7536$$

$$\text{II} = \text{I} : 2\pi \quad r^2 + r(20 + r) = \frac{7536}{6,28}$$

$$r^2 + 20r + r^2 = 1200$$

$$2r^2 + 20r = 1200$$

$$\text{III} = \text{II} : 2 \quad r^2 + 10r = 600$$

$$\text{IV} \quad r^2 + 10r + 25 = 625$$

$$\text{V} \quad r + 5 = \pm 25$$

$$r_1 = 20 \text{ cm.}$$

B. Die Höhe des Cylinders ist $20 + 20 = 40 \text{ cm.}$

C. Der Inhalt (V) des Cylinders ist

$$V = r^2 \pi \times h$$

$$V = 400 \times 3,14 \times 40 = 50240 \text{ ccm.}$$

Antwort: Der Radius der Grundfläche des Cylinders ist **20 cm**, die Höhe beträgt **40 cm** und der Inhalt **50240 ccm**.

4. Pfalz. 1892.

Wenn man ein Zweimarkstück auf ein silbernes Fünfmärkstück legt, so bleibt ein ringförmiger Oberflächenteil der letzteren Münze unbedeckt. Wie groß ist dieser Kreisring, wenn der Umfang des Fünfmärkstüekes 119,32 mm und der Durchmesser des Zweimarkstückes 28 mm ist? Wie groß ist die Oberfläche des Fünfmärkstüekes bei einer Dicke von 3 mm? ($\pi = 3,14$.)

Lösung.

A. I. Bezeichnet $2R$ den Durchmesser des Fünfmärkstüekes, so ist $2R\pi = 119,32$, folglich $R = 19$ mm.

II. Der Radius r des Zweimarkstückes ist 14 mm groß.

III. Die Ringfläche ist $R^2\pi - r^2\pi = (R+r)(R-r)\pi = 33 \times 5 \times 3,14 = 518,1$ qmm.

B. Die Oberfläche (O) des Fünfmärkstüekes besteht aus den beiden Kreisflächen und dem Mantel des Randes; also ist

$$O = 2R^2\pi + 2R\pi \times 3$$

$$O = 2R\pi(R + 3)$$

$$O = 38 \times 3,14 \times 22 = 2625,04 \text{ qmm.}$$

Antwort: Die Oberfläche des Fünfmärkstüekes ist 2625,04 qmm.

4. Oberbayern. 1887.

In ein cylindrisches Gefäß, das einen Durchmesser von 0,9 m hat und zum Teil mit Wasser gefüllt ist, wird ein unregelmäßig geformter Stein geworfen, wodurch das Wasser um 0,45 m steigt. Welchen kubischen Inhalt hat der Stein?

Lösung.

Der kubische Inhalt des Steines (V) ist so groß, wie der Raum, den das verdrängte Wasser einnimmt, nämlich

$$V = \left(\frac{0,9}{2}\right)^2 \pi \times 0,45 = (0,45)^2 \times 3,14$$

$$V = 0,2861325 \text{ cbm} = 286 \text{ cdm } 132,5 \text{ ccm.}$$

Antwort: Der kubische Inhalt des Steines ist 286 cdm 132,5 ccm.

4. Oberbayern. 1885.

Ein kreisrunder Wasserbehälter hat einen Durchmesser von 5 m. Derselbe kann durch eine Röhre, welche in 1 Minute 235,5 Liter Wasser abziehen läßt, entleert werden; um wie viele Centimeter wird der Wasserspiegel nach einer Stunde gesunken sein? ($\pi = 3,14$.)

Lösung.

Das in einer Stunde entleerte Wasser ($235,5 \times 60$ Liter) hat dasselbe Volumen, wie ein Cylinder, dessen Halbmesser $2,5 \text{ m} = 25 \text{ dm}$ und dessen Höhe $x \text{ dm}$ ist. Daher ist

$$(25)^2 \times 3,14 \times x = 235,5 \times 60$$

$$x = \frac{23550 \times 60}{25 \times 25 \times 314} = \frac{3 \times 60}{25} = 7,2 \text{ dm} = 72 \text{ cm.}$$

Antwort: Der Wasserspiegel sinkt 72 cm.

3. Niederbayern. 1885.

Wird ein senkrechter Cylinder, dessen Oberfläche 138,445 qdm beträgt und dessen Grundfläche 19,625 qdm groß ist, schräg abgestutzt, so daß an der Spitze die Schnittfläche mit der Mantelfläche einen Winkel von 45° bildet, so fragt es sich, wie viel der ursprüngliche Cylinder an Oberfläche und Inhalt verloren hat?

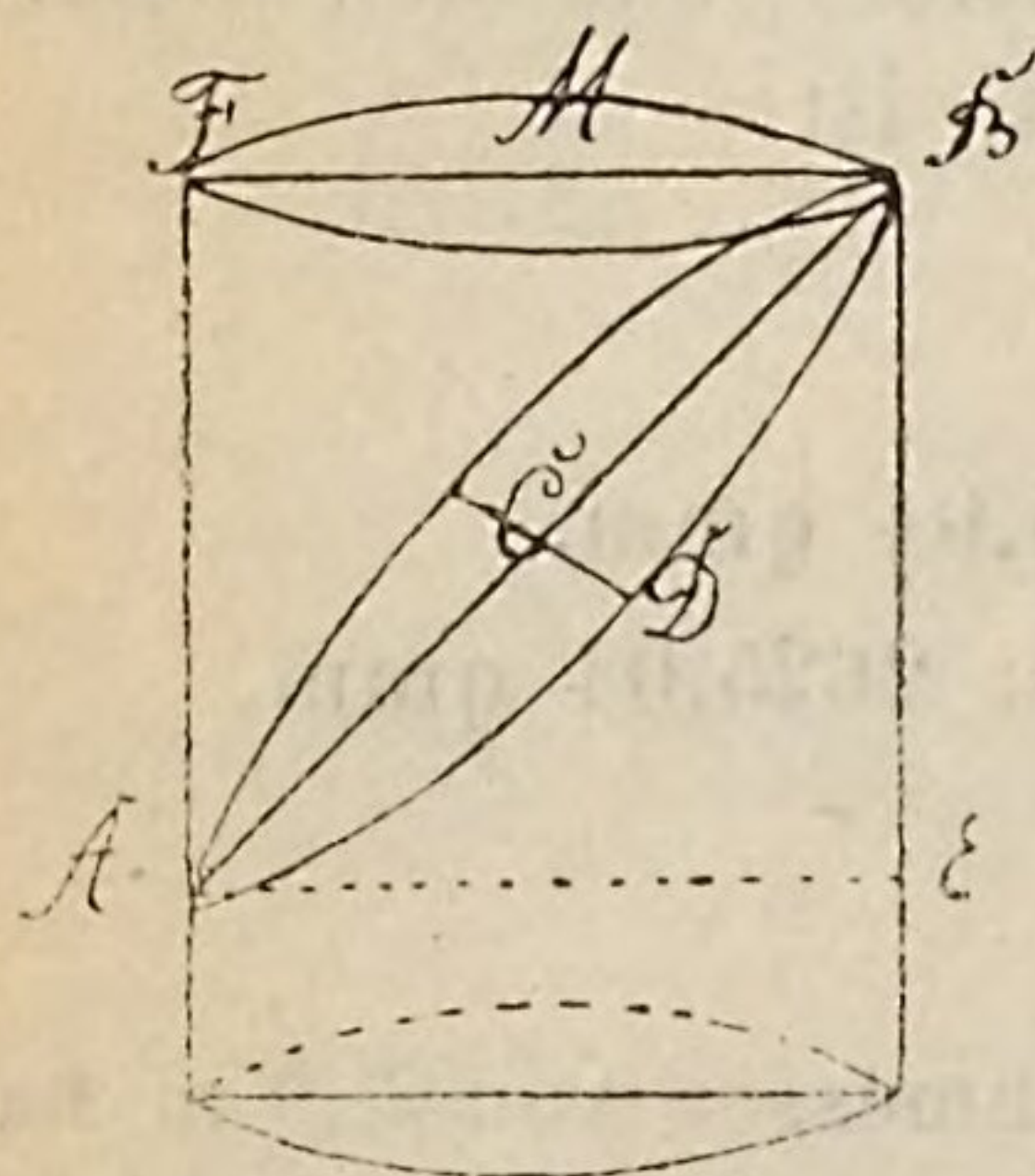


Fig. 22.

Lösung.

Vorausgesetzt, daß der Schnitt so geführt wird, daß er durch einen Punkt (B) der Peripherie der kreisrunden Deckfläche (Fig. 22) geht, verliert der Schnitt an Oberfläche 1. die Deckfläche, 2. den halben Mantel des Cylinders AFBE, erhält dagegen die Ellipse mit den halben Achsen CB und CD. Der Verlust an Inhalt beträgt das halbe Volumen des Cylinders AFBE.

A. I. Das Dreieck AFB ist gleichschenkelig und rechtwinkelig ($\angle FBA = \angle FAB = 45^\circ \text{ R}$).

II.

$$(MB)^2 \pi = 19,625$$

$$(MB)^2 = \frac{19,625}{3,14} = 6,25$$

$$MB = r = 2,5; \text{ somit}$$

$$AF = FB = 2r = 5 \text{ dm.}$$

III. Der Mantel des Cylinders AFBE hat

$$5 \times 3,14 \times 5 = 78,5 \text{ qdm.}$$

IV. Die große Achse der elliptischen Schnittfläche (AB) ist

$$AB = \sqrt{AF^2 + (FB)^2} = 5 \sqrt{2} = 7,07 \text{ dm.}$$

Die kleine Achse ist 5 dm.

V. Der Flächeninhalt der elliptischen Schnittfläche (S) ist

$$S = \frac{7,07}{2} \times \frac{5}{2} \times 3,14 = 27,75 \text{ qdm.}$$

VI. Der Verlust des ursprünglichen Cylinders an Oberfläche (OV)

$$OV = 19,625 + \frac{78,5}{2} - 27,75 = 31,125 \text{ qdm.}$$

B. I. Der Rauminhalt des cylindrischen Stückes ABBE beträgt

$$J = 19,625 \times 5 = 98,125 \text{ cdm.}$$

II. Der Verlust des ursprünglichen Cylinders (J) an Volumen (JV) ist

$$JV = \frac{98,125}{2} = 49,0625 \text{ cdm.}$$

Antwort: Der Verlust an der Oberfläche beträgt 31,125 qdm, am Inhalte 49,0625 cdm.

2. Niederbayern. 1882.

Eine cylinderförmige, eiserne Röhre soll 16,4 m lang werden und 2,5 cm Wandstärke und 7,4 cm lichte Weite erhalten. Wie viel Material ist dazu nötig? ($\pi = 3,14$)

Lösung.

Der Radius im lichten (BC Fig. 23) ist $r = 7,4 : 2 = 3,7 \text{ cm}$ und der Radius (CD) bis zum äußeren Umfang beträgt $R = 3,7 + 2,5 = 6,2 \text{ cm}$. Das massive Volumen (V) der Röhre ist, wenn $AH = h$ die Länge 1640 cm bezeichnet,

$$V = R^2 \pi h - r^2 \pi h = h \pi (R^2 - r^2) = h \pi (R + r) (R - r)$$

$$V = 1640 \times 3,14 \times 9,9 \times 2,5 = 127452,5 \text{ ccm.}$$

Antwort: Das Volumen des Materials beträgt 127452,5 ccm.

3. Oberbayern. 1890.

Ein 3,5 m langer Baumstamm wird zu einem Brunnenrohr von 8 cm lichter Weite ausgebohrt. Wie groß ist die Wandstärke, wenn die Holzmasse nach Entfernung des Abfalles 338492 ccm beträgt?

Lösung.

Der Halbmesser im Lichten (BC Fig. 23) ist $r = 4 \text{ cm}$. Bezeichnet man die Wandstärke (AB) mit $x \text{ cm}$, so ist, wenn der Halbmesser bis zur äußeren Fläche $CD = R$ gesetzt wird, $x = R - r$.

I. Das Volumen (v) des ausgebohrten Teiles ist

$$v = 4^2 \times 3,14 \times 350 = 17584 \text{ ccm.}$$

II. Das ursprüngliche Volumen des Stammes (V) war

$$V = 338492 + 17584 = 356076 \text{ ccm.}$$

III. Der Halbmesser des ursprünglichen Stammes (R) wird berechnet aus

$$R^2 \pi \times 350 = 356076$$

$$R^2 = \frac{356076}{1099} = 324$$

$$R = \sqrt{324} = 18 \text{ cm.}$$

IV. Die Wandstärke ist $x = 18 - 4 = 14 \text{ cm}$.

Antwort: Die Wandstärke des Brunnenrohres beträgt 14 cm.

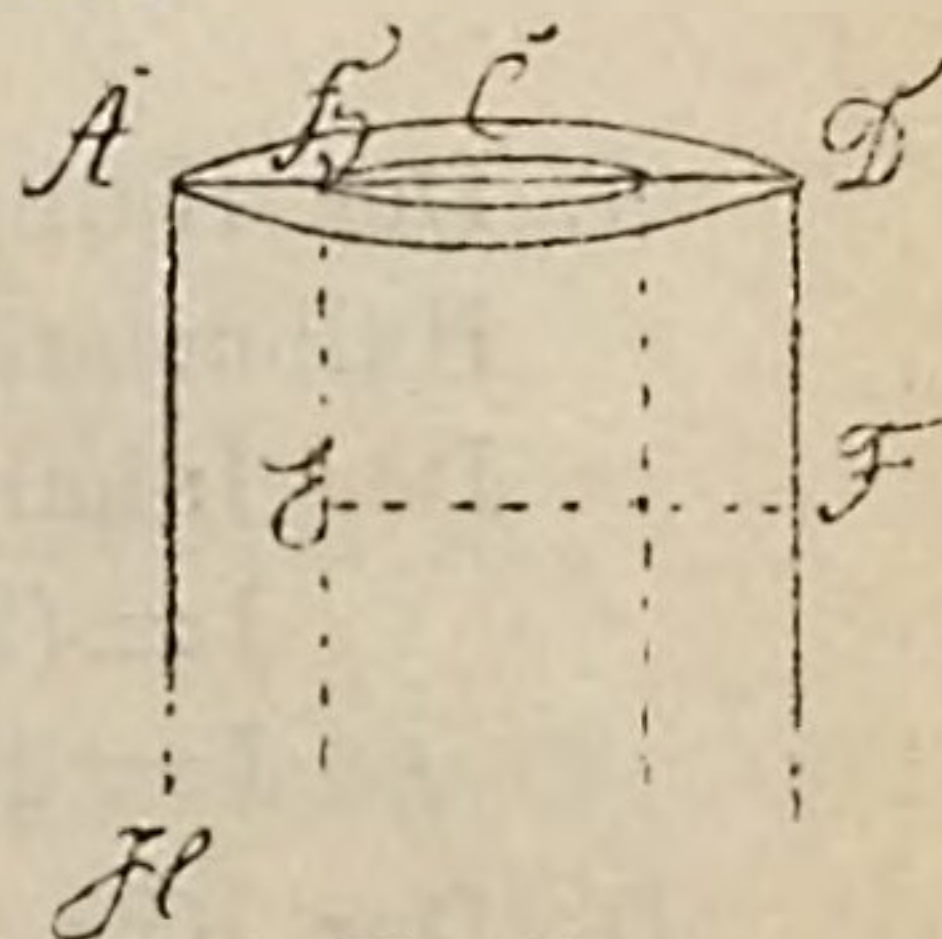


Fig. 23.

4. Oberpfalz. 1887.

An einem kreisrunden Wasserturm beträgt die Höhe das 6fache des inneren Radius. a) Wie groß sind die Dimensionen, wenn der Turm 18,84 cbm Wasser faßt? b) Wie hoch kommt der äußere Verputz, wenn die Mauer überall 1 m dick ist, und das Quadratmeter mit 1,25 *M.* berechnet wird?

Lösung.

Wird der innere Radius (BC Fig. 23) mit r bezeichnet, so ist die Höhe ($AH = h = 6r$). Der Ausdruck für das Volumen des lichten Raumes ist $r^2 \pi h$; somit ist

$$A. \quad r^2 \pi \times 6r = 18,84$$

$$r^3 = \frac{18,84}{18,84} = 1$$

$$r = 1 \text{ m.}$$

B. I. Der äußere Halbmesser ($CD = R$) ist $R = 2 \text{ m.}$

II. Die äußere Wand hat

$$F = 2 R \pi h = 2 \times 2 \times 3,14 \times 6 = 75,36 \text{ qm.}$$

III. Der äußere Verputz kostet P

$$P = 75,36 \times 1,25 = 94,20 \text{ M.}$$

Antwort: A. Der Durchmesser des Turmes im lichten ist 2 m, der äußere Durchmesser 4 m und die Höhe 6 m.

B. Der äußere Verputz kostet 94,20 M.

4. Oberbayern. 1884.

Ein 25 m tiefer Brunnenschacht soll mit einer 48 cm dicken Backsteinmauer ausgekleidet werden, so daß dieselbe ein Rohr bildet, das eine lichte Weite von 1 m Durchmesser hat. Wie viele Backsteine sind hiezu nötig, wenn ein solcher mit Einrechnung des verbindenden Mörtels 32 cm lang, 16 cm breit und 7,5 cm hoch ist? ($\pi = 3,14$.)

Lösung.

I. Der Halbmesser der lichten Weite ist $BC = r = 50 \text{ cm}$, der Halbmesser bis zum äußeren Mantel R ist $R = 50 + 48 = 98 \text{ cm}$.

Der Inhalt der Röhre (J) ist

$$J = (R^2 \pi h - r^2 \pi h) = h \pi (R + r) (R - r)$$

$$J = 2500 \times 3,14 \times 148 \times 48 = 55\,766\,400 \text{ ccm.}$$

II. Der Kubikraum eines Steines ist $32 \times 16 \times 7,5 = 3840 \text{ ccm.}$

III. Die Anzahl der nötigen Steine beträgt $55766400 : 3840 = 14522\frac{1}{2}$
oder

Die Anzahl der Steine beträgt $\frac{25 \times 314 \times 148 \times 48}{32 \times 16 \times 7,5} =$
14522 $\frac{1}{2}$ Stücke.

Antwort: Zur Auskleidung des Brunnenschachtes sind **14 523** Backsteine erforderlich.

4. Schwaben. 1890.

Ein Brunnen von 8,5 m Tiefe und 1,8 m Durchmesser soll ausgemauert werden. Wie viele cbm Mauerwerk gehören dazu, wenn der Durchmesser im lichten 1,2 m lang wird?

Lösung.

Bezeichnet man den Inhalt des Mauerwerkes mit V, den äußeren Halbmesser mit $R=0,9$ m, den inneren mit $r=0,6$ m und die Tiefe des Brunnens mit $h=8,5$ m, so ist

$$V = R^2 \pi h - r^2 \pi h = (R + r) (R - r) \pi h$$

$$V = 1,5 \times 0,3 \times 3,14 \times 8,5 = \mathbf{12,0105 \text{ cbm.}}$$

Antwort: Zur Ausmauerung des Brunnenschachtes sind **12,0105 cbm** Mauerwerk erforderlich.

2. Oberpfalz. 1884.

Ein Brunnen ist (im lichten) 1,5 m breit. a) Wie viel Hektoliter Wasser sind in demselben, wenn das Wasser 3,6 m hoch steht? b) Wie viel Kubikmeter enthält das Mauerwerk, wenn dasselbe 10 m hoch und 30 cm dick ist? ($\pi=3,14$.)

Lösung.

A. Der Inhalt eines 36 dm hohen Cylinders mit dem Radius 7,5 dm beträgt

$$L = (7,5)^2 \times 3,14 \times 36$$

$$L = 6358,5 \text{ Liter} = \mathbf{63,585 \text{ hl.}}$$

B. Das Volumen des Mauerwerkes (M) ist

$$M = (0,75 + 0,3)^2 \pi \times 10 - (0,75)^2 \pi \times 10$$

$$M = 1,8 \times 0,3 \times 3,14 \times 10$$

$$M = 5,4 \times 3,14 = \mathbf{16,956 \text{ cbm.}}$$

Antwort: Das im Brunnen stehende Wasser beträgt **63,585 hl**, das Mauerwerk **16,956 cbm**.

3. Oberpfalz. 1888.

Ein kreisrundes Bassin von 12,5 m Durchmesser und 2,5 m Tiefe soll mit Backsteinen ausgemauert werden. Wie viel Steine à 25 cm äußere Breite und 5 cm Dicke sind hiezu erforderlich?

Lösung.

- I. Nimmt man an, daß durch die Cementverbände der Abfall an Steinen bei der Ausmauerung des Bodens gedeckt wird, so ist die Fläche (F) des Behälters, welche von den Seiten der Steine gebildet wird,

$$F = R^2 \pi + 2 R \pi h = R \pi (R + 2 h)$$

$$F = 6,25 \times 3,14 \times 11,25 = 220,781250 \text{ qm.}$$

- II. Die Fläche der Breitseite eines Steines (f) ist

$$f = 0,25 \times 0,05 = 0,0125 \text{ qm.}$$

- III. Die Anzahl der nötigen Steine (n) beträgt

$$n = \frac{220,781250}{0,0125} = 17662,5 \text{ Stück.}$$

Antwort: Zur Ausmauerung des Behälters sind **17 663 Steine** erforderlich.

2. Oberpfalz. 1894.

Ein hohler Metalcyylinder hat einen äußeren Durchmesser von 130 cm und eine Wanddicke von 5 cm. Derselbe wird in eine gleichlange Röhre umgossen, deren äußerer Durchmesser 150 cm beträgt. Wie groß wird die Wanddicke der letzteren? (Genau bis auf mm.)

Lösung.

- I. Das Volumen der Röhre (V) ist so groß, wie dasjenige des Cylinders. Zur Berechnung desselben sind die beiden Durchmesser (60 cm und 65 cm) gegeben, die Länge ist eine beliebige z. B. 100 oder 1 oder a.
- II. Nach Berechnung des Volumens der Röhre, wird der innere Radius der Röhre (x) gesucht.
- III. Die Wanddicke ist gleich dem Unterschiede zwischen den beiden Halbmessern der Röhre.

Ausführung.

- I. Volumen des Cylinders

$$V = R^2 \pi a - r^2 \pi \cdot a$$

$$V = \pi a (R^2 - r^2) = \pi a (R + r) (R - r)$$

$$V = \pi a \times 125 \times 5.$$

- II. Volumen der Röhre $V = (75)^2 \pi a - x^2 \pi \cdot a$

$$V = \pi a [(75)^2 - x^2].$$

III. Somit $\pi a \times 125 \times 5 = \pi a [(75)^2 - x^2]$.

VI = III : πa $125 \times 5 = (75)^2 - x^2$
 $x^2 = 9 \times (25)^2 - (25)^2$
 $x^2 = 8 \times (25)^2 = 2 \times 4 \times (25)^2$
 $x = 2 \times 25 \times 1,4142$
 $x = 70,71 \text{ cm.}$

V. Die Wanddicke der Röhre (D) ist

$$D = 75 - 70,71 = 4,29 \text{ cm.}$$

Antwort: Die Wanddicke der Röhre ist 4,29 cm.

3. Oberbayern. 1888.

Ein Gärtner soll ein elliptisches Blumenbeet von 14,08 m Länge und 9,045 m Breite anlegen. a) Wie weit hat er die Brennpunkte von einander zu legen? b) Wie viel Erde braucht er zur Herstellung des Beetes, wenn dasselbe durchgehends 25 cm hoch werden soll?

Lösung.

A. PD (Fig. 24) $= \sqrt{(7,04)^2 - (4,5225)^2}$

$$PD = \sqrt{11,5625 \times 2,5175}$$

$$PD = 5,395$$

$$PQ = 10,79 \text{ m.}$$

B. Die Menge der benötigten Erde (V) ist:

$$V = 7,04 \times 4,5225 \times 3,14 \times \frac{1}{4}$$

$$V = 25 \text{ cbm.}$$

Antwort: a) Der Abstand der Brennpunkte von einander muß 10,79 m betragen. b) Zur Herstellung des Beetes sind 25 cbm Erde nötig.

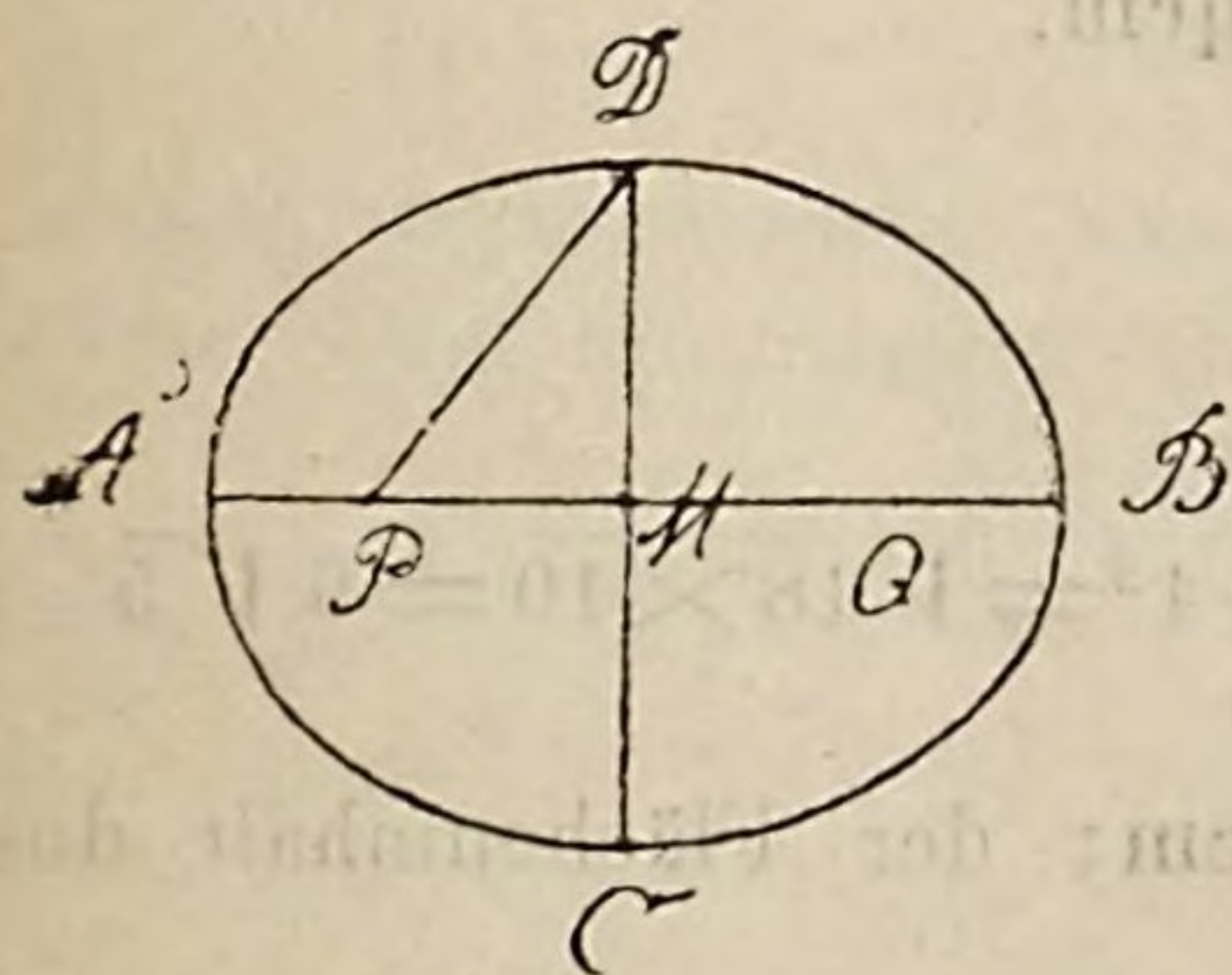


Fig. 24.

Kegel.

4. Schwaben. 1894.

Ein Turm hat ein kegelförmiges Dach von $8\frac{3}{4}$ m schräger Höhe und $5\frac{1}{4}$ m Durchmesser der Grundfläche. Wie teuer kommt die Zinkbedachung dieses Turmes, wenn das qm mit 8,25 M bezahlt wird? ($\pi = 3,14$.)

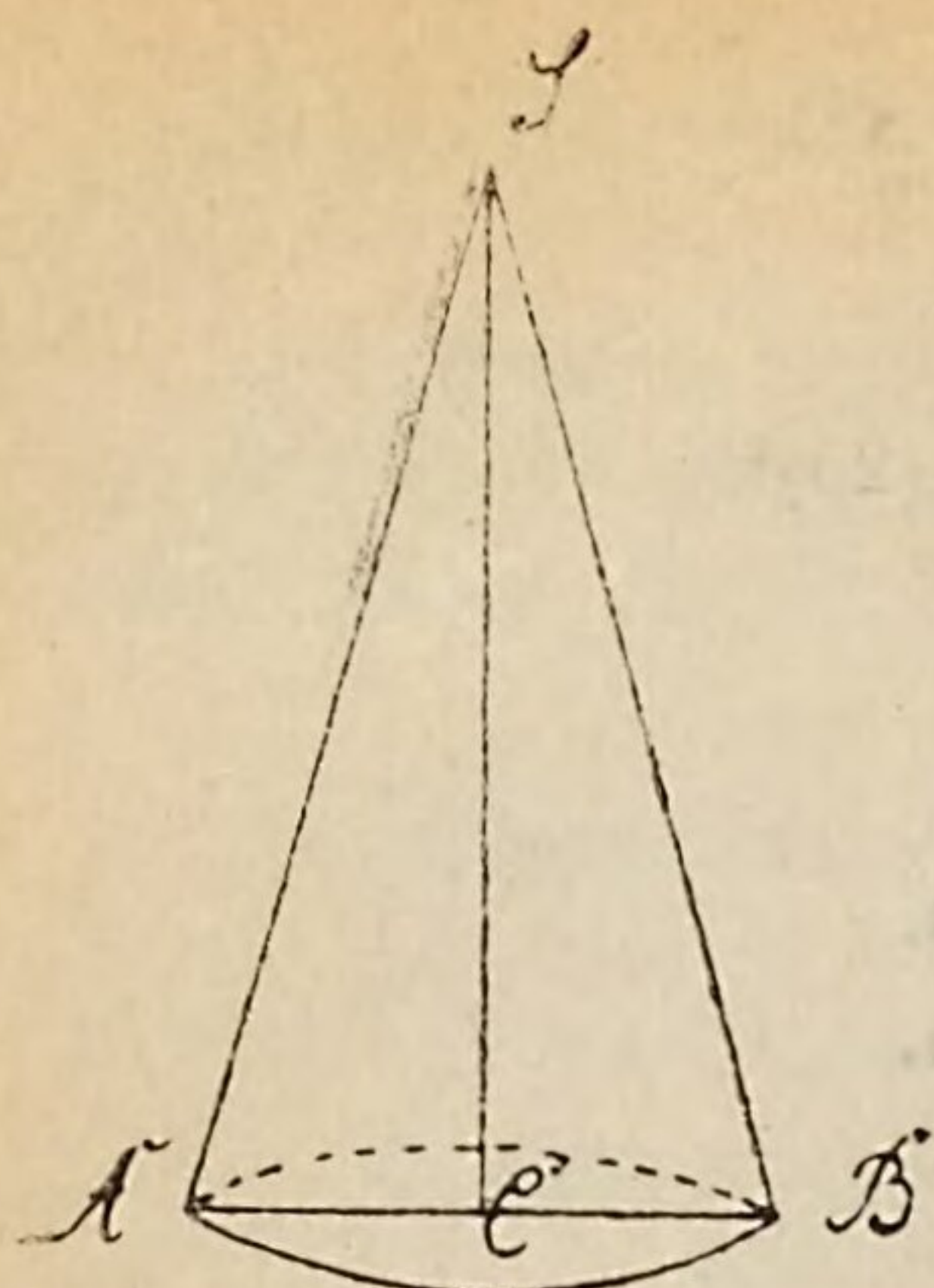


Fig. 25.

Lösung.

I. Die Fläche des Kegelmantels (Fig. 25) ist, wenn $SB = s$ gesetzt wird,

$$F = r\pi s = \frac{21}{8} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{4} = \frac{1155}{16} \text{ qm.}$$

II. Die Kosten der Zinkbedachung (P) betragen

$$P = \frac{1155}{16} \times \frac{33}{4} = 595,55 \text{ M.}$$

Antwort: Die Kosten betragen 595,55 M.

4. Unterfranken. 1888.

Ein Kegel hat einen unteren Umfang von 25,12 cm und eine Seitenlinie von 14 cm. Wie hoch ist er und wie groß ist der Flächeninhalt des Mantels?

Lösung.

A. Der Flächeninhalt des Mantels (Fig. 25) ist

$$= \frac{25,12 \times 14}{2} = 175,84 \text{ qcm.}$$

B. I.

$$2r\pi = 25,12$$

$$r = \frac{25,12}{6,28} = 4 \text{ cm.}$$

$$\text{II. } SC = \sqrt{SB^2 - CB^2} = \sqrt{(14)^2 - 4^2} = \sqrt{18 \times 10} = 6\sqrt{5}$$

$$SC = 6 \times 2,236 = 13,416 \text{ cm.}$$

Antwort: Die Höhe des Kegels ist 13,416 cm; der Flächeninhalt des Mantels beträgt 175,84 qcm.

4. Mittelfranken. 1885.

Ein 18 cm hoher, senkrechter Kegel von Kupfer soll vergoldet werden. Wie hoch kommt die Vergoldung, wenn der Kegel 1224,6 ccm Inhalt hat und das qcm Vergoldung mit 8 S bezahlt wird?

Lösung.

Die Oberfläche (O) besteht aus Grundfläche und Kegelmantel (Fig. 25).

I. Die Grundfläche (F) kann aus Inhalt und Höhe ($SC = h$) des Kegels berechnet werden.

II. Sobald die Größe der Grundfläche bekannt ist, wird der Halbmesser derselben bestimmt.

III. Aus dem Halbmesser der Grundfläche und der Höhe des Kegels wird dessen Seitenhöhe ($SB=s$) berechnet.

IV. Mittels des Halbmessers und der Seitenhöhe wird die Mantelfläche gesucht.

Ausführung.

$$\text{I.} \quad \frac{18 \cdot F}{3} = 1224,6$$

$$F = 204,1.$$

$$\text{II.} \quad r^2 \pi = 204,1$$

$$r = \sqrt{\frac{2041}{31,4}} = \sqrt{65} = 8,06 \text{ cm.}$$

$$\text{III.} \quad s = \sqrt{(18)^2 + 65}$$

$$s = \sqrt{324 + 65} = \sqrt{389} = 19,72 \text{ cm.}$$

$$\text{IV.} \quad O = F + r \pi \cdot s$$

$$O = 204,1 + 8,06 \times 3,14 \times 19,72$$

$$O = 204,1 + 499,08 = 703,18 \text{ qcm.}$$

V. Die Kosten der Vergoldung (P) betragen

$$P = 703,18 \times 8 = 5625,55 \text{ } \mathcal{M} = 56,25 \text{ } \mathcal{M}.$$

Antwort: Die Vergoldung kostet 56,25 $\mathcal{M}$.

3. Oberbayern. 1891.

Ein zu erbauender Circus erhält einen Durchmesser von 40 m. Die von Eisen konstruierte Einfassung hat eine Höhe von 10 m, und

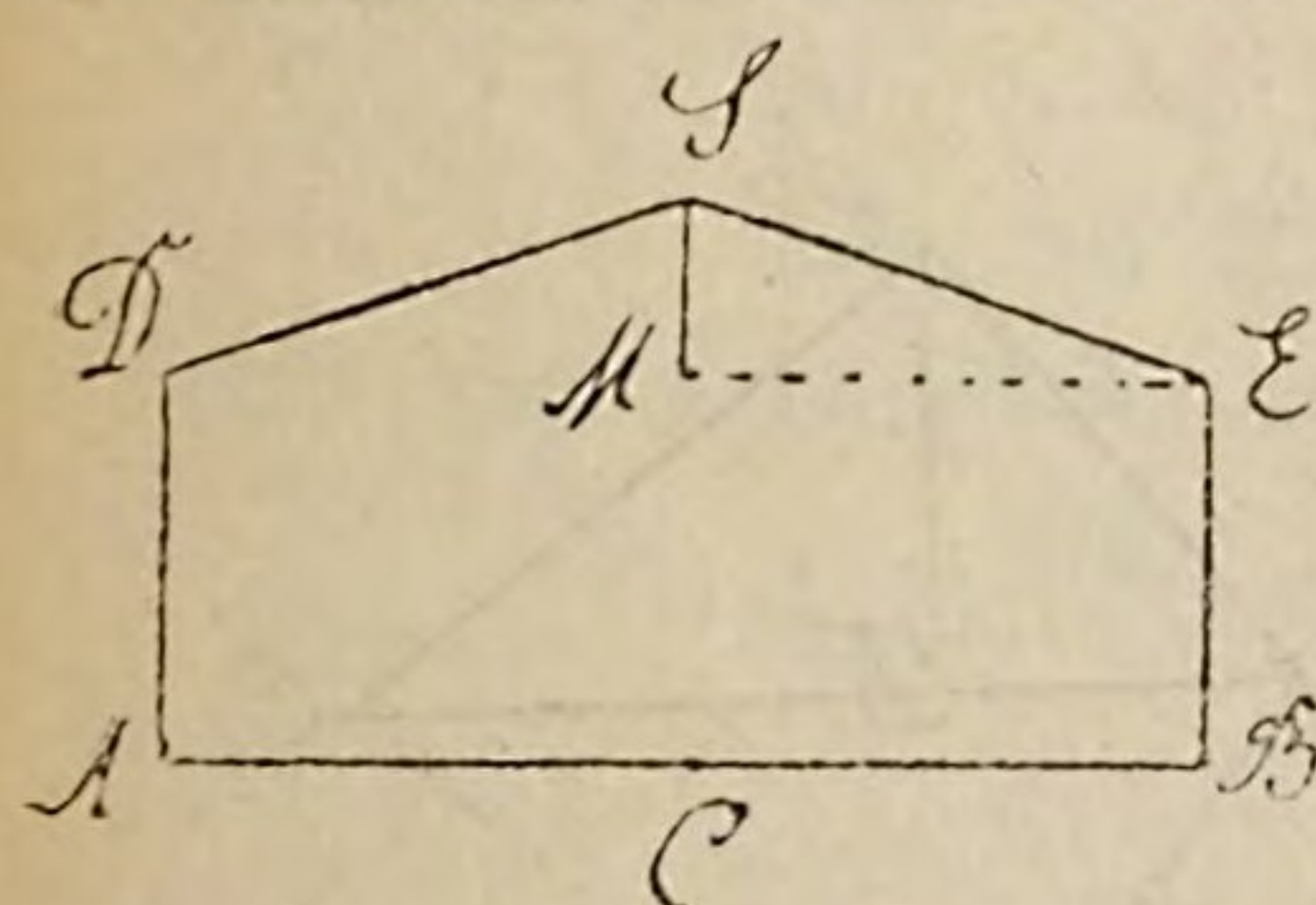


Fig. 26.

die kegelförmige Eindrachung, von der Dachbasis gerechnet, eine solche von 6 m. Was kostet der Circus ohne Einrichtung, wenn sich bei der Grunderwerbung das qm auf 5,9 $\mathcal{M}$, bei der cylindrischen Einfassung, gleichwie bei der Eindrachung auf 6,4 $\mathcal{M}$ berechnet?

Lösung.

$$\text{I. Die Kosten (G) für den Boden (Fig. 26) betragen } G = (20)^2 \pi \times 5,9 = 400 \times 3,14 \times 5,9 \text{ } \mathcal{M}.$$

$$\text{II. Die Kosten (M) für die Umfriedung sind } \mathcal{M} = 40 \pi \times 10 \times 6,4 = 400 \times 3,14 \times 6,4 \text{ } \mathcal{M}.$$

$$\text{III. Das Dach (T) kostet: } \frac{40 \times 3,14 \times \sqrt{(20)^2 + 36}}{2} \times 6,4 = 20 \times 3,14 \times 20,88 \times 6,4 = 400 \times 3,14 \times 1,044 \times 6,4 \text{ } \mathcal{M}.$$

$$\text{IV. Sämtliche Kosten sind: } 400 \times 3,14 (5,9 + 6,4 + 6,6816) = 23840,89 \text{ } \mathcal{M}.$$

3. Unterfranken. 1892.

Ein rechteckiges Dreieck, dessen Katheten 2,1 cm und 7,2 cm lang sind, wird um die größere Kathete als Achse gedreht. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des entstandenen Kegels? ($\pi = 2\frac{2}{7}$.)

Lösung.

A. Die Grundfläche bildet der von der kürzeren Kathete beschriebene Kreis (Fig. 25), dessen Fläche $F = \frac{2,1 \times 2,1 \times 22}{7} = 0,3 \times 2,1 \times 22$ qcm ist. Die Höhe des Kegels ist die längere Kathete (SC). Der Inhalt des Kegels ist

$$V = \frac{0,3 \times 2,1 \times 22 \times 7,2}{3} = 33,264 \text{ ccm.}$$

B. I. Die Grundfläche ist $0,3 \times 2,1 \times 22$ qcm.

II. Die Seitenhöhe $SB = \sqrt{(7,2)^2 + (2,1)^2} = 7,5$ cm.

III. Der Flächeninhalt des Mantels beträgt $2,1 \times 2\frac{2}{7} \times 7,5$ cm.

IV. Die Oberfläche (O) hat als Flächeninhalt

$$O = 0,3 \times 2,1 \times 22 + 0,3 \times 22 \times 7,5 = 0,3 \times 22 \times 9,6$$

$$O = 63,36 \text{ qcm.}$$

Antwort: Die Oberfläche des Kegels hat 63,36 qcm, der Inhalt 33,264 ccm.

3. Niederbayern. 1884.

Ein rechtwinkeliges Dreieck von 10,14 qcm Flächeninhalt, dessen größere Kathete 5,2 m ist, dreht sich um die Hypotenuse und um die kleinere Kathete. Welches ist die Differenz der Volumina der beiden durch die Drehung entstandenen Körper?

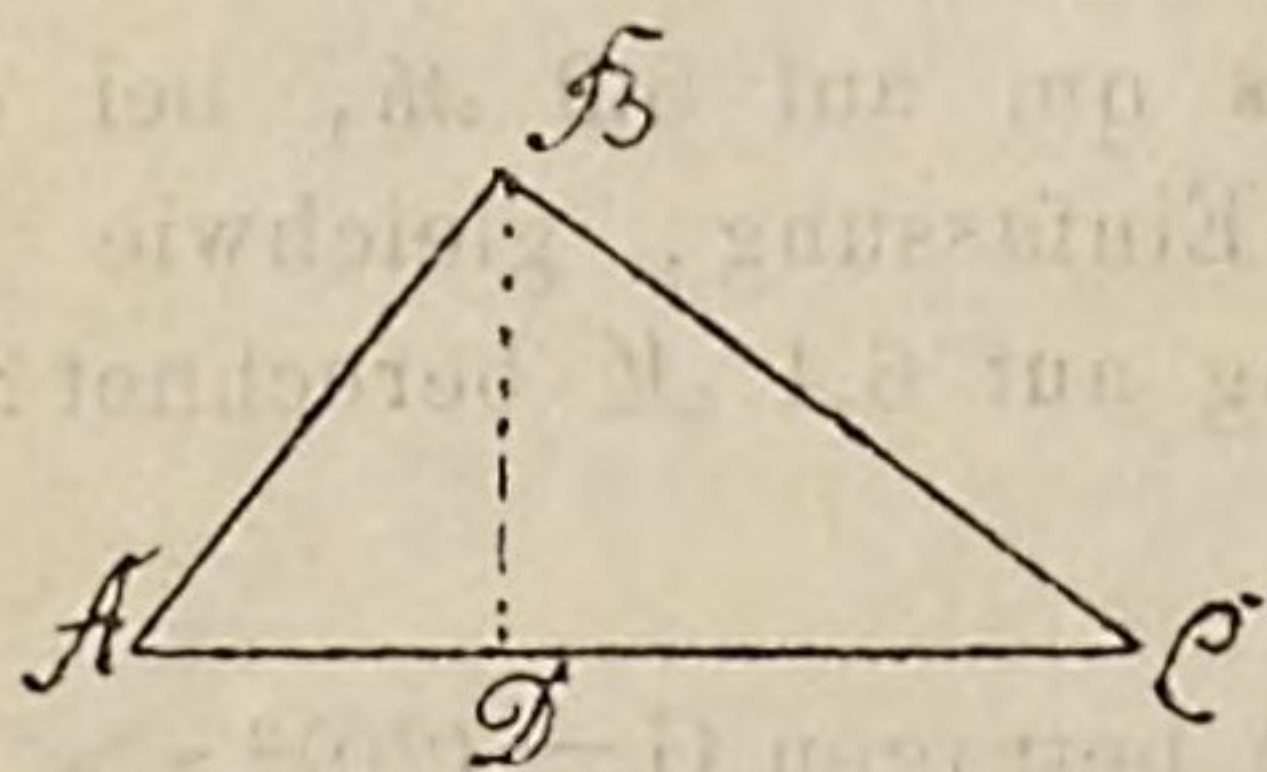


Fig. 27.

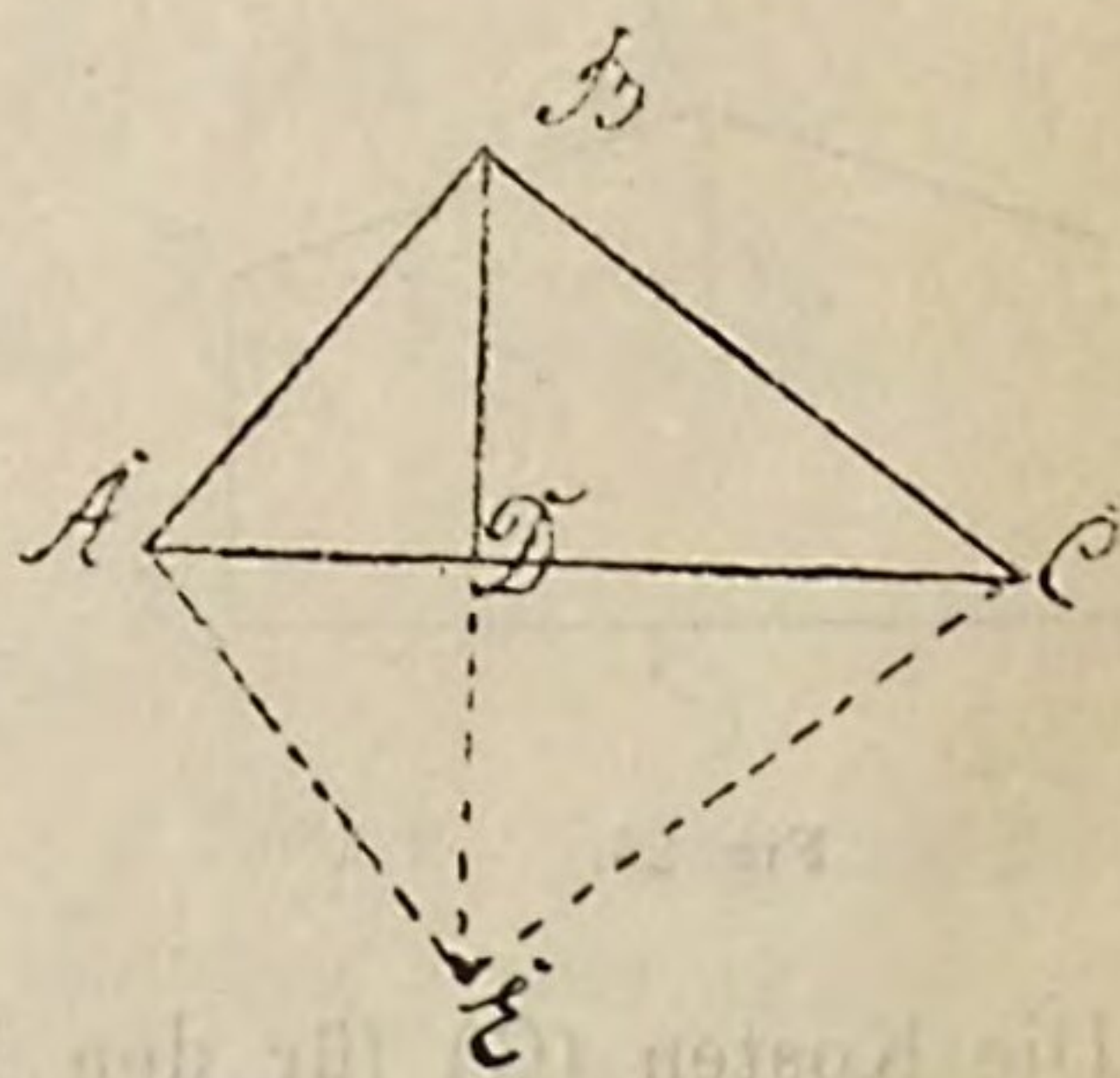


Fig. 28.

I. Dreht sich das Dreieck (Fig. 27) um die Hypotenuse, so entsteht ein Doppelkegel ABCE (Fig. 28). Der Radius der gemeinsamen Basis der beiden Kegel ist BD d. i. die Hypotenusenhöhe des rechtwinkligen Dreieckes. Die Höhe des einen Kegels (BAD) ist AD, des anderen (BCE) DC. Die beiden Höhen sind die Abschnitte der Hypotenuse, welche die Hypotenusenhöhe bildet.

II. Wird das Dreieck um die kleinere Kathete AB gedreht, so entsteht ein Kegel (Fig. 29), dessen Höhe diese kleinere Kathete ist und dessen grössere Kathete (BC) zum Radius wird.

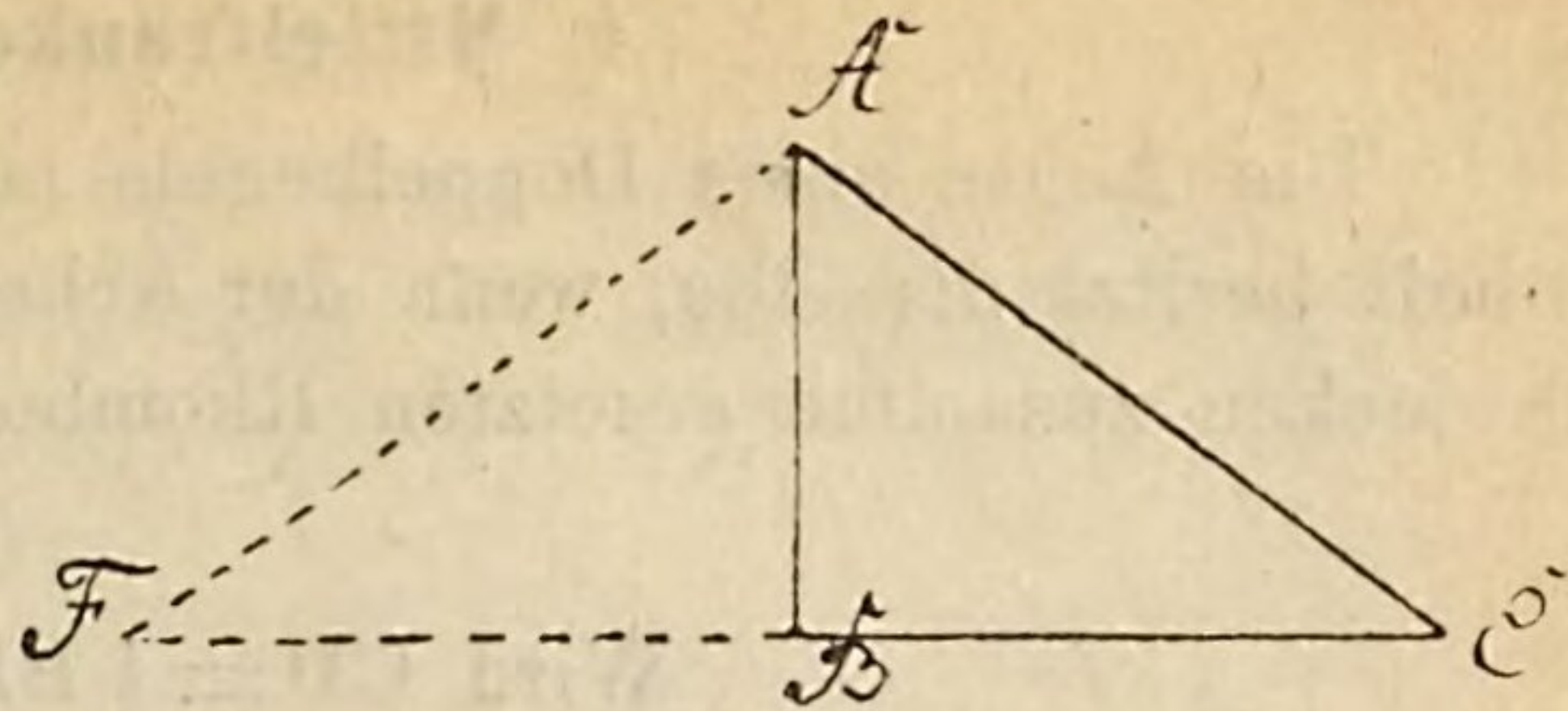


Fig. 29.

III. Demnach müssen zunächst die Kathete AB, die Hypotenuse AC, die Hypotenusenhöhe BD und die Abschnitte AD und DE berechnet werden.

Ausführung.

$$\text{I.} \quad \frac{AB \cdot BC}{2} = 10,14$$

$$AB = \frac{10,14}{2,6} = 3,9 \text{ m.}$$

$$\text{II.} \quad AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(3,9)^2 + (5,2)^2} = \sqrt{(3 \times 1,3)^2 + (4 \times 1,3)^2} \\ = 1,3 \sqrt{3^2 + 4^2} = 6,5 \text{ m.}$$

$$\text{III.} \quad AD \cdot AC = (AB)^2 \\ AD = \frac{3,9 \times 3,9}{6,5} = 2,34 \text{ m.}$$

$$\text{IV.} \quad DC \cdot AC = (BC)^2 \\ DC = \frac{5,2 \times 5,2}{6,5} = 4,16 \text{ m.}$$

$$\text{V.} \quad \overline{BD}^2 = AD \times DC \\ BD = \sqrt{2,34 \times 4,16} = 3,12 \text{ m.}$$

VI. Der körperliche Inhalt des Doppelkegels (i) ist

$$i = \frac{(BD)^2 \pi \cdot AD}{3} + \frac{(BD)^2 \pi \cdot DC}{3} \\ i = \frac{(BD)^2 \pi}{3} (AD + DC) = \frac{(BD)^2 \pi \cdot AC}{3} \\ i = \frac{3,12 \times 3,12 \times 3,14 \times 6,5}{3} = 66,226368 \text{ cbm.}$$

VII. Der Kubikinhalt des Kegels (ACF) beträgt J

$$J = \frac{(BC)^2 \pi \times AB}{3} \\ J = \frac{(5,2)^2 \times 3,14 \times 3,9}{3} = 27,04 \times 3,14 \times 1,3 \text{ cbm} \\ J = 110,37728 \text{ cbm.}$$

VIII. Der Unterschied (D) der Volumina der beiden Körper ist

$$D = 110,37728 - 66,226368 = 44,150912, \text{ cbm.}$$

4. Mittelfranken. 1886.

Die Achse eines Doppelkegels mißt 84 cm; welchen körperlichen Inhalt besitzt derselbe, wenn der Achsenschnitt einen aus zwei regulären Dreiecken zusammengesetzten Rhombus bildet?

Lösung.

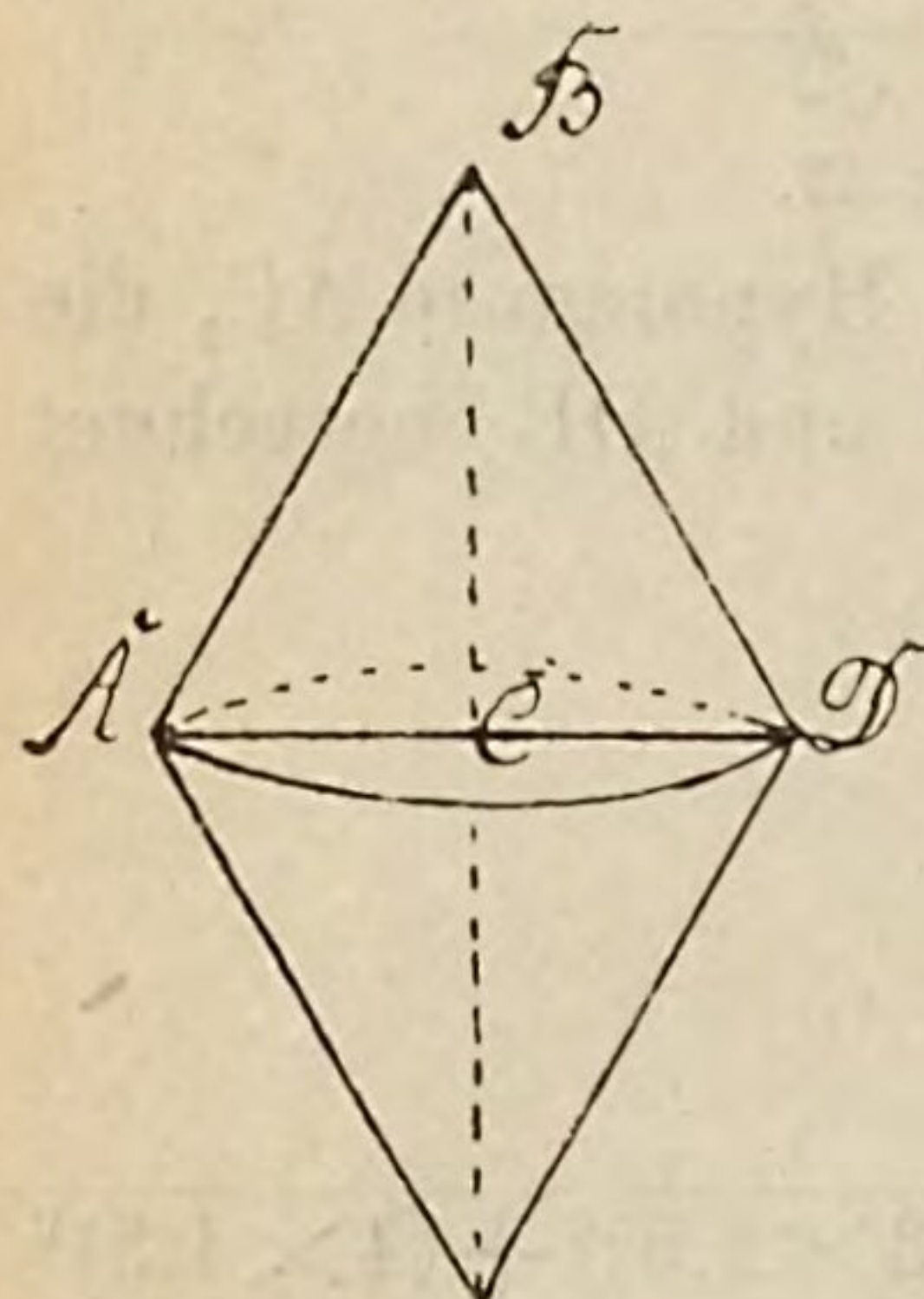


Fig. 30.

Wird $CD = \frac{1}{2} BD$ (Fig. 30) mit x bezeichnet, so ist

$$\text{I. } 4x^2 = (42)^2 + x^2$$

$$x^2 = \frac{42 \times 42}{3} = 42 \times 14 = 588.$$

II. Das Volumen des einfach Kegels (v) ist

$$v = \frac{42 \times x^2 \pi}{3} = 14 \times 42 \times 14 \times 3,141$$

$$v = 25856,712 \text{ ccm.}$$

III. Der körperliche Inhalt des Doppelkegels (V) ist

$$V = 51713,424 \text{ ccm.}$$

Antwort: Der körperliche Inhalt ist 51713,424 ccm.

3. Oberfranken. 1888.

Die Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Grundfläche einen 5 cm langen Radius besitzt, beträgt 282,60 qcm. Wie groß ist der Kubikinhalt des Kegels?

Lösung.

Aus dem Inhalt der Mantelfläche wird die Seitenfläche (SB Fig. 31) gesucht und dann die Höhe des Kegels (SC) berechnet.

I. Die Grundfläche ist

$$r^2 \pi = 25 \times 3,14 = 78,50 \text{ qcm.}$$

II. Der Flächeninhalt des Mantels ist

$$282,60 - 78,50 = 204,10 \text{ qcm.}$$

III. Wird die Seitenhöhe $SB = s$ bezeichnet,

$$\text{so ist } r \pi s = 5 \times 3,14 s = 204,10$$

$$s = 13 \text{ cm.}$$

IV. Die Höhe des Kegels

$$SC = \sqrt{(13)^2 - 5^2} = \sqrt{18 \times 8} = 12 \text{ cm.}$$

V. Der Kubikinhalt des Kegels ist

$$V = \frac{78,5 \times 12}{3} = 314 \text{ ccm.}$$

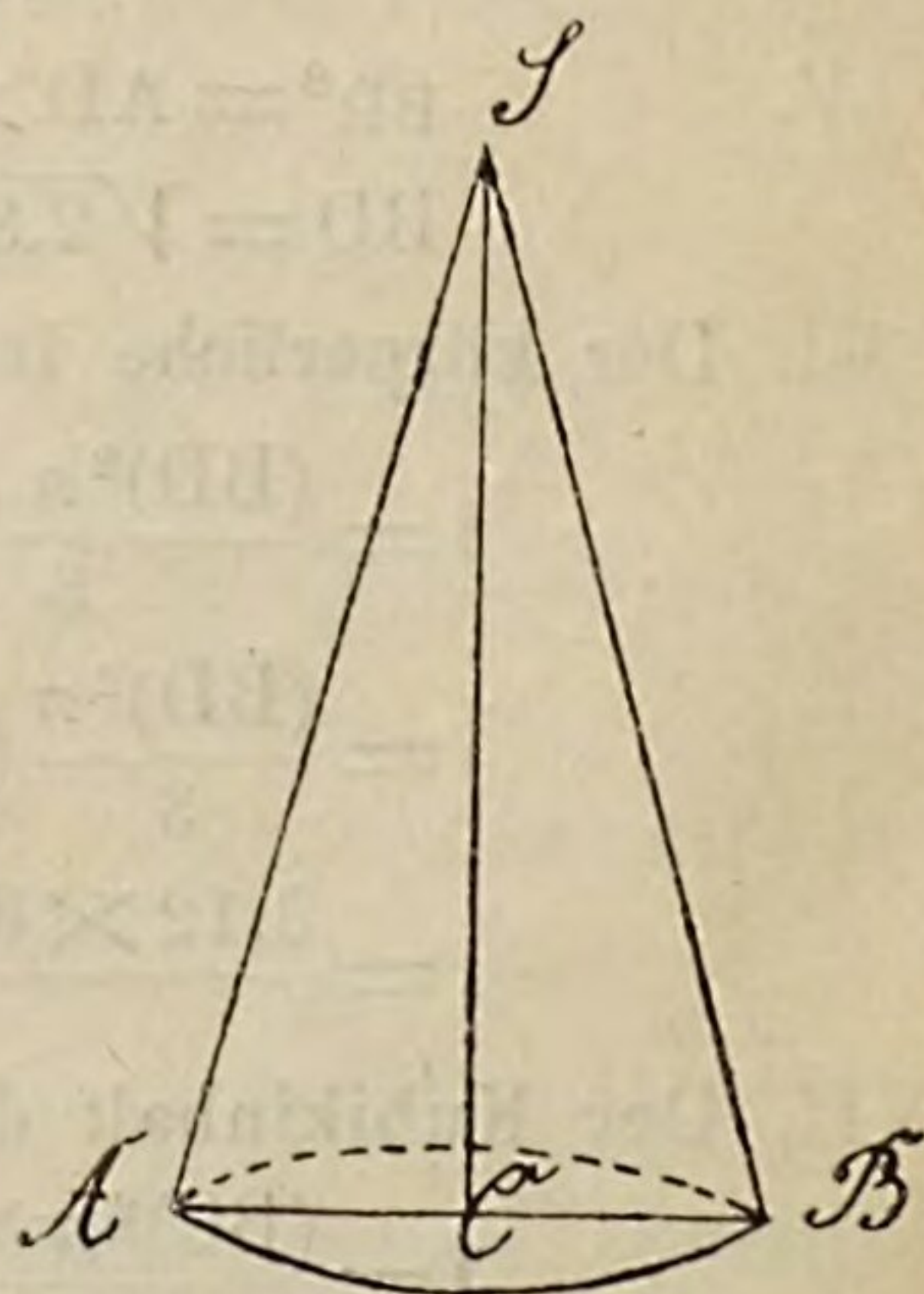


Fig. 31.

5. Schwaben. 1892.

Ein gleichseitiger Kegel hat 624 qm Oberfläche. Wie groß sind Durchmesser, Höhe und Inhalt?

Lösung.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche (AC Fig. 31) mit x m, so ist die Seitenhöhe $2x$ m und der Ausdruck für die Oberfläche ist $x^2\pi + x\pi \times 2x$; somit ist

$$\text{I. } \begin{aligned} x^2\pi + x\pi \times 2x &= 624 \\ 3x^2\pi &= 624 \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{\frac{208}{3,14}} = \sqrt{66,24} = 8,139 \text{ m.}$$

II. Durchmesser und Seitenhöhe sind $2 \times 8,139 = 16,278 \text{ m.}$

III. Die Höhe des Kegels ist $SC = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = x\sqrt{3}$
 $SC = 14,096 \text{ m.}$

IV. Der Inhalt des Kegels (V) ist

$$V = \frac{208 \times 14,096}{3} = 977,322666 \text{ cbm.}$$

Antwort: Der Durchmesser des Kegels beträgt **16,278 m**, die Höhe **14,096 m** und der Inhalt **977,322666 cbm**.

3. Mittelfranken. 1888.

Welchen Kubikinhalt hat ein Kegel, wenn die in eine Ebene ausgebreitete Mantelfläche einen Kreissektor bildet, dessen Zentriwinkel 90° mißt, und dessen Halbmesser 32 cm lang ist?

Lösung.

I. Der Bogen, welcher den Sektor begrenzt, ist der 4. Teil der Peripherie eines Kreises mit dem Radius AC (Fig. 32) = 32 cm, somit $= \frac{2 \times 32 \times \pi}{4} = 50,24 \text{ cm.}$

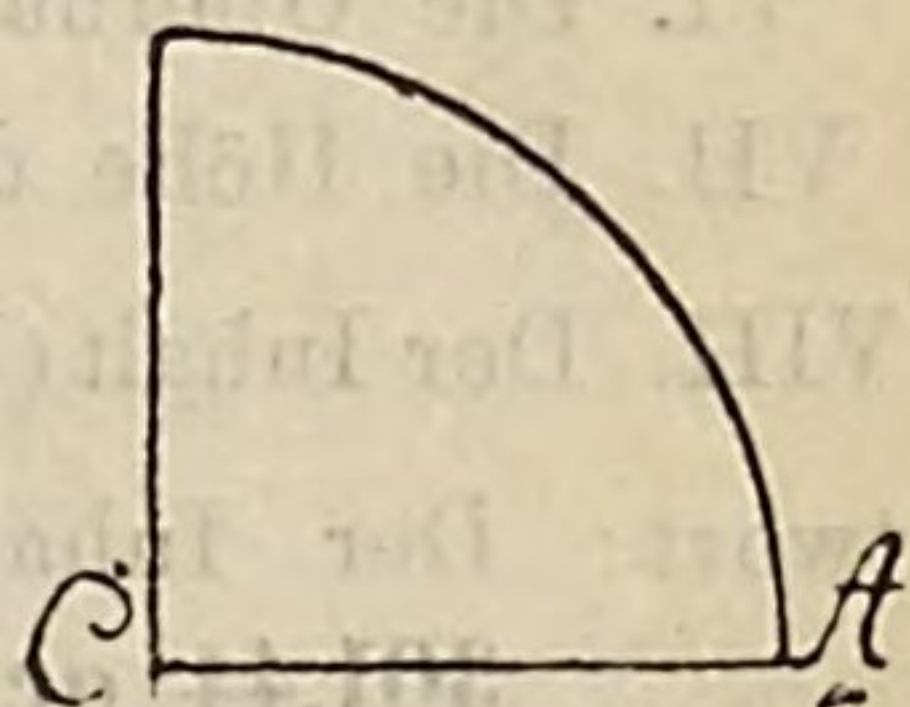


Fig. 32.

II. Dieser Bogen bildet den Umfang der Grundfläche eines Kegels (Fig. 31), dessen Radius mit r bezeichnet sei, so daß $2r\pi = 16\pi$, somit $r = 8 \text{ cm}$ ist.

III. Die Höhe $SC = \sqrt{(32)^2 - 8^2} = \sqrt{40 \times 24} = 8\sqrt{15} = 8 \times 3,873 = 30,984 \text{ cm.}$

IV. Der Inhalt des Kegels $V = \frac{64 \times 3,14 \times 30,984}{3} = 2075,515 \text{ cm.}$

2. Oberpfalz. 1891.

Der Mantel eines geraden Kegels bildet abgewickelt einen Kreissektor, dessen Zentriwinkel 216° und dessen Fläche 188,4 qcm beträgt; wie groß sind Inhalt und Oberfläche dieses Kegels?

Lösung.

- I. Zuerst wird die Fläche des Kreises gesucht, von welchem der Sektor ein Teil ist.
- II. Der Radius dieses Kreises ist die Seitenhöhe (SB) des Kegels (Fig. 31).
- III. Der zum Sektor gehörige Kreisbogen bildet den Umfang der Grundfläche dieses Kegels.
- VI. Aus diesem Umfang wird der Radius (r) der Grundfläche berechnet.
- V. Ist r gefunden, so lassen sich die Grundfläche und die Höhe des Kegels u. s. w. bestimmen.

Ausführung.

- I. Die zum Kreise ergänzte Sektorfläche ist $\frac{188,4 \times 360}{216}$
 $= \frac{5}{3} \times 188,4 = 314 \text{ qcm.}$
 - II. Der Radius zu diesem Kreise oder die Seitenhöhe SB
 $= \sqrt{\frac{314}{3,14}} = 10 \text{ cm.}$
 - III. Der Kreisbogen zum Sektor $\frac{188,4 \times 2}{10} = 37,68 \text{ cm.}$
 - IV. Demnach ist die Peripherie der Grundfläche oder $2r\pi = 37,68$
und $r = 6 \text{ cm.}$
 - V. Der Inhalt der Grundfläche ist $6^2\pi = 113,04 \text{ qcm.}$
 - VI. Die Oberfläche des Kegels mißt $188,4 + 113,04 = 301,44 \text{ qcm.}$
 - VII. Die Höhe des Kegels $CS = \sqrt{(10)^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm.}$
 - VIII. Der Inhalt (V) des Kegels beträgt $V = \frac{113,04 \times 8}{3} = 301,440 \text{ ccm.}$
- Antwort: Der Inhalt des Kegels ist **301,440 ccm**, die Oberfläche **301,44 qcm**.

5. Schwaben. 1886.

Ein 15 m hoher Kegel hat zur Grundfläche eine Ellipse, deren Achsen 7 m und 4 m betragen. Wie groß ist der Kubikinhalt des Kegels? ($\pi = 3,14$.)

Lösung.

Wenn a und b die halben Achsen der Ellipse bezeichnen, so ist $a b \pi$ der Ausdruck für den Flächeninhalt (F)

$$\text{I. } a b \pi = F = 2 \times \frac{7}{2} \times \frac{4}{2} \times 3,14 = 22 \text{ qm.}$$

$$\text{II. } V = \frac{F h}{3} = \frac{22 \times 15}{3} = 110 \text{ cbm.}$$

Antwort: Der Kubikinhalt des Kegels ist **110 cbm**.

Kegelstumpf (abgekürzter Kegel).

3. Oberpfalz. 1889.

Die Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes beträgt 536,94 qm, der Mantel desselben hat 345,4 qm, die Seitenlinie 10 m. Zu suchen sind die Radien der Grundflächen.

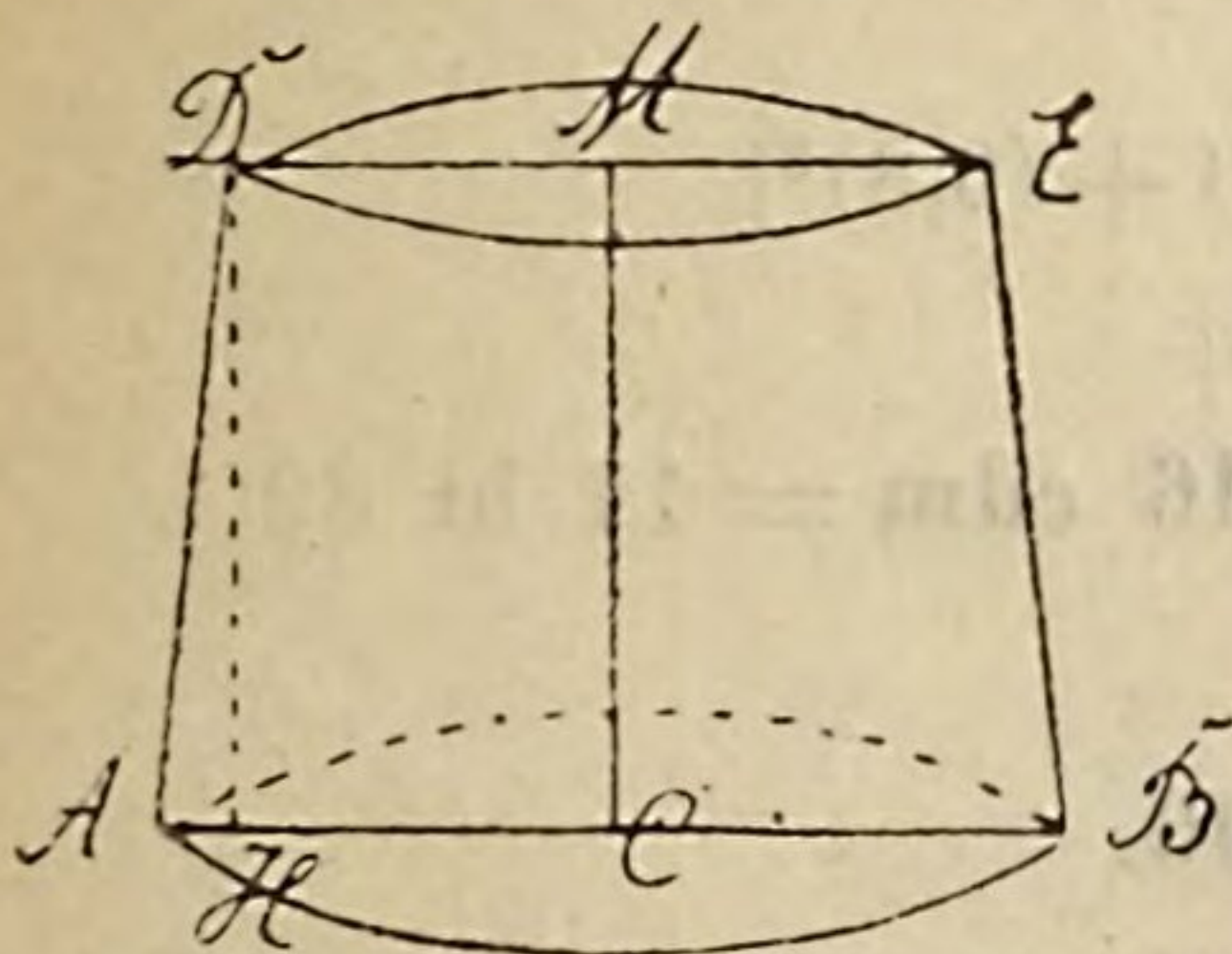


Fig. 33.

Lösung.

I. Zieht man von der ganzen Oberfläche die Mantelfläche ab, so erhält man die Summe der Grundflächen, mithin die Summe der Quadrate der zu suchenden Radien (R und r).

II. Aus der Mantelfläche und der Seitenhöhe wird die Summe der Radien gesucht.

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & R^2 \pi + r^2 \pi = 536,94 - 345,4 \\
 \text{II.} & (R + r) \pi \times 10 = 345,4 \\
 \hline
 \text{I.} & R^2 + r^2 = 61 \\
 \text{II.} & R + r = 11 \\
 \hline
 \text{III} = \text{II} \times \text{II} & R^2 + 2Rr + r^2 = 121 \\
 \text{I.} & R^2 + r^2 = 61 \\
 \hline
 \text{IV} = \text{III} - \text{I} & 2Rr = 60 \\
 \text{V} = \text{I} - \text{IV} & R^2 - 2Rr + r^2 = 1 \\
 & R - r = \pm 1 \\
 \text{II.} & R + r = 11 \\
 \hline
 & R_1 = 6 \text{ m} \quad R_2 = 5 \text{ m} \\
 & r_1 = 5 \text{ m} \quad r_2 = 6 \text{ m}
 \end{array}$$

Antwort: Der Radius des größeren Grundkreises ist 6 m, des kleineren 5 m.

6. Schwaben. 1887.

In einem abgekürzten Kegel von $16\frac{1}{2}$ m Höhe sind die Radien 12 m und 5 m. Welches ist die Seitenhöhe und der Flächeninhalt des Mantels dieses Kegels?

Lösung.

I. Die Seitenhöhe (AD = s Fig. 33) ist

$$s = \sqrt{DH^2 + AH^2} = \sqrt{(16,8)^2 + 7^2} = 18,2 \text{ m.}$$

II. Der Flächeninhalt des Mantels ist

$$(12 + 5) \times \frac{1}{2} \times 18,2 = 972,40 \text{ qm.}$$

Antwort: Die Seitenhöhe des Kegels hat 18,2 m, der Mantel 972,40 qm.

6. Schwaben. 1886.

Ein kreisrunder Bottich von $1\frac{1}{4}$ m Tiefe hat Enddurchmesser von 1,40 und 1,26 m. Wie viel Hektoliter kann derselbe fassen?

Lösung.

$1,25 \text{ m} = 12,5 \text{ dm}$, $0,70 \text{ m} = 7 \text{ dm}$ und $0,63 \text{ m} = 6,3 \text{ dm}$. Das Volumen V ist

$$V = \frac{12,5}{3} \times \frac{22}{7} [7^2 + 7 \times 6,3 + (6,3)^2]$$

$$V = \frac{2,75}{21} [49 + 44,1 + 39,69]$$

$$V = \frac{2,75}{21} \times 132,79 = 1738,916 \text{ cdm} = 17 \text{ hl } 39 \text{ l.}$$

Antwort: Der Bottich faßt 17,39 hl.

3. Oberfranken. 1890.

In der unteren Grundfläche eines Würfels von 13,824 ccm Inhalt ist ein Kreis beschrieben und auf demselben ein gerader Kegel errichtet, dessen Höhe 5mal so groß ist als der Halbmesser der Grundfläche. Wie groß ist der Kegelstumpf, der zwischen den Grundflächen des Würfels liegt?

Lösung.

I. Aus dem Inhalte des Würfels (Fig. 34) wird die Länge der Würfelkante (K) berechnet.

$$K^3 = 13,824, \text{ somit } K = MC = 2,4 \text{ cm.}$$

II. $SC = 5 \times \frac{AB}{2} = 5 \times 1,2 = 6 \text{ cm}$ und $SM = 6 - 2,4 = 3,6 \text{ cm.}$

III. $SC : SM = \frac{1}{2} AB : EM$
 $6 : 3,6 = 1,2 : EM$
 $EM = 0,72 \text{ cm.}$

IV. Der Inhalt (V) des Kegelstumpfes ist

$$V = \frac{MC}{3} \times \pi \left[\left(\frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{AB}{2} \times EM + EM^2 \right]$$

$$V = \frac{2,4}{3} \times 3,14 [(1,2)^2 + 1,2 \times 0,72 + (0,72)^2]$$

$$V = 7,089866 \text{ ccm.}$$

Antwort: Der Inhalt des Kegelstumpfes beträgt 7,090 ccm.

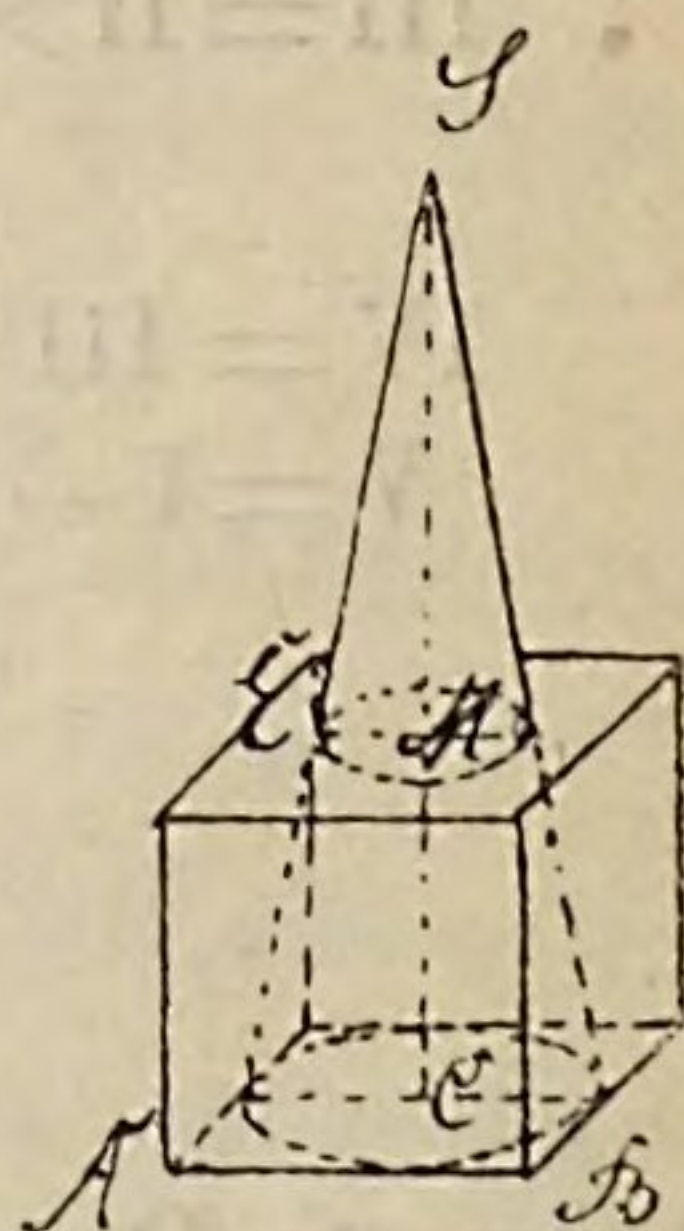


Fig. 34.

3. Oberpfalz. 1884.

Ein 9,3 m langer Baumstamm vom der Form eines Kegelstumpfes hat am dicken Ende einen Umfang von 2,512 m und am dünnen einen Durchmesser von $\frac{1}{2}$ m. Was ist das Holz dieses Stammes wert, wenn das Ster mit 9 $\mathcal{M}$ berechnet wird?

Lösung.

Zur Berechnung des Inhaltes eines Kegelstumpfes (V) ist erforderlich, daß der Halbmesser der Grundfläche (R) und der Deckfläche (r) nebst der Höhe (h) bekannt sind. Da die Grösse des Radius R nicht angegeben ist, muß sie aus dem Umfange (2,512 m) gesucht werden.

$$\text{I.} \quad 2 R \pi = 2,512$$

$$R = 0,4 \text{ m}$$

$$\text{II.} \quad r = \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ m.}$$

$$\text{III.} \quad V = \frac{9,3}{3} \times 3,14 [(0,4)^2 + 0,4 \times 0,25 + (0,25)^2]$$

$$V = 3,1 \times 3,14 \times 0,3225$$

$$V = 3,139215 \text{ cbm.}$$

IV. Der Preis des Stammes (P) ist

$$P = 28,25 \text{ M.}$$

Antwort: Der Baumstamm hat 3,139215 cbm und ist 28,25 M wert.

3. Oberpfalz. 1890.

Ein gerader Kegelstumpf von 5769,5 ccm Inhalt und 45 cm Höhe hat oben einen um 10 cm größeren Halbmesser. Wie groß sind die beiden Radien? ($\pi = 3,14$.)

Lösung.

Bezeichnet x cm den Radius der unteren Fläche, so ist der Radius der oberen Fläche $R = (x + 10)$ cm. Der Ausdruck für den Inhalt V ist dann $V = \frac{45}{3} \times [(x + 10)^2 + (x + 10)x + x^2] \times 3,14$. Gemäß der Angabe ist

$$15 [x^2 + 20x + 100 + x^2 + 10x + x^2] \times 3,14 = 5769,5$$

$$3x^2 + 30x + 100 = 122,5$$

$$x^2 + 10x = \frac{122,5 - 100}{3} = 7,5$$

$$x^2 + 10x + 25 = 32,5$$

$$x = -5 \pm 5,7$$

$$x_1 = 0,7 \text{ cm.}$$

Antwort: Der Radius der oberen Grundfläche ist 10,7 cm, der unteren 0,7 cm.

2. Unterfranken. 1889.

Ein Kegelstumpf, bei welchem die Radien der Endflächen 18 cm und 10 cm betragen, hat ein Volumen von 9482 ccm und 800 cmm.

a) Welche Höhe hat der Kegelstumpf? b) Wie viele cm mißt die

Seitenlinie? c) Wie viele qcm enthält der Mantel? d) Wie groß ist die Gesamtoberfläche? e) Wie hoch ist der Kegel, von welchem der Stumpf ein Teil ist?

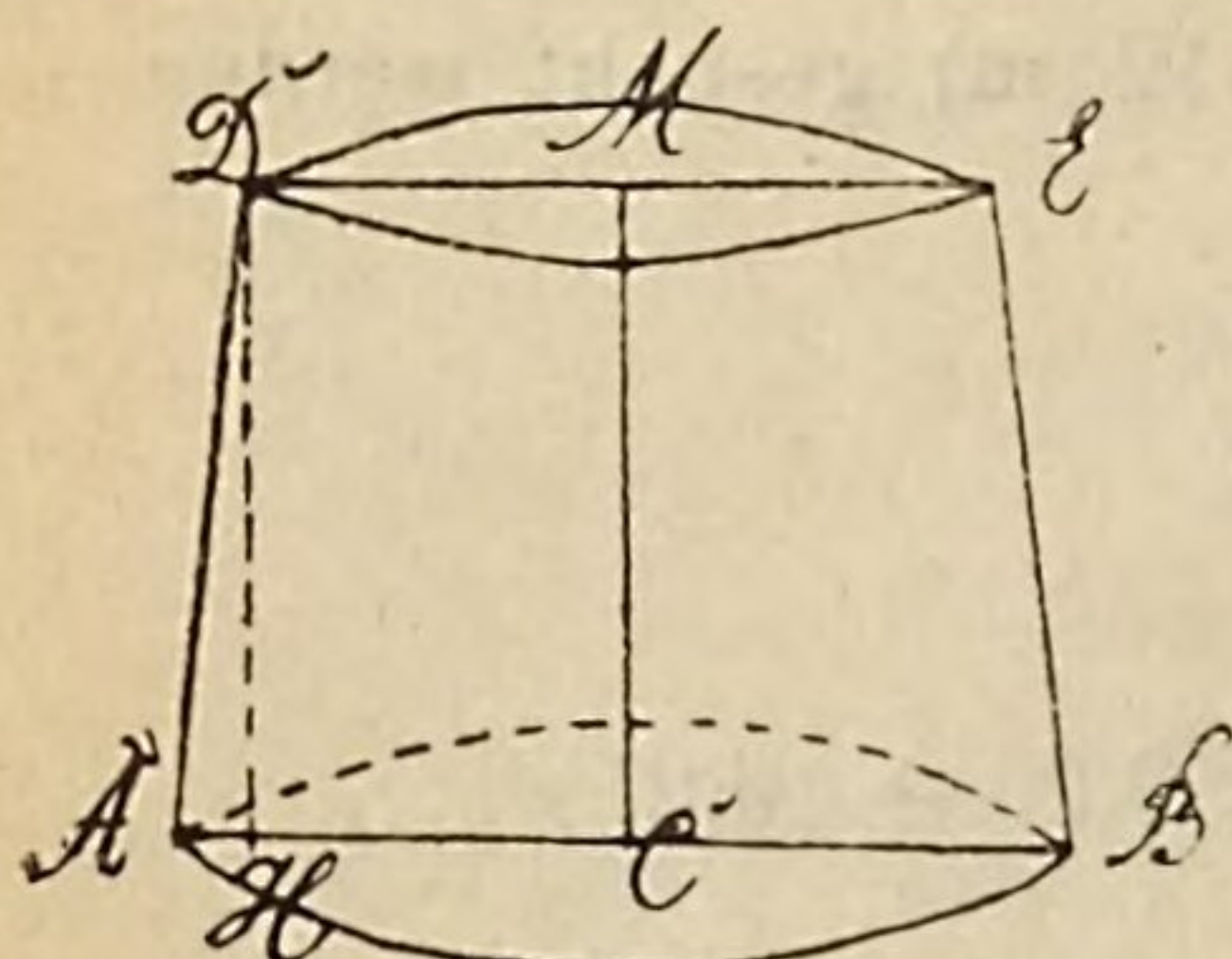


Fig. 35.

Lösung.

A. Wird die Höhe DH (Fig. 35) mit x cm bezeichnet, so ist

$$\frac{x}{3} \times 3,14 [(18)^2 + 18 \times 10 + (10)^2] = 9482,8$$

$$x = \frac{9482,8 \times 3}{3,14 \times 604} = 15 \text{ cm.}$$

B. $AD = \sqrt{(15)^2 + (18 - 10)^2} = 17 \text{ cm.}$

C. Die Fläche des Mantels enthält $(18\pi + 10\pi) \times 17 = 1494,64 \text{ qcm.}$

D. Die Gesamtoberfläche O ist

$$O = (18)^2 \pi + (10)^2 \pi + 14,9464 = 2726 \text{ qcm.}$$

E. Bezeichnet y cm die Höhe des ergänzten Kegels, so ist

$$18 : 10 = y : (y - 15)$$

$$8 : 15 = 18 : y \text{ [nämlich } (18 - 10) : (y - y + 15) = 18 : y]$$

$$y = \frac{135}{4} = 33,75 \text{ cm.}$$

Antwort: a) Der Kegelstumpf hat eine Höhe von **15 cm**; b) die Seitenhöhe ist **17 cm**; c) der Mantel enthält **1494,64 qcm**; d) die Gesamtoberfläche ist **2726 qcm**; e) der ergänzte Kegel, von welchem der Stumpf ein Teil ist, hat eine Höhe von **33,75 cm**.

3. Pfalz. 1887.

Ein Baumstamm, dessen Inhalt, von der mittleren Durchschnittsfläche aus berechnet, 5,428746 cbm beträgt, ist 8,5 m lang, und seine Endflächen verhalten sich wie 64 : 49. a) Wie groß ist seine mittlere Durchschnittsfläche? b) Wie groß sind Grund- und Gegenfläche zusammen? c) Wie groß ist jede Fläche für sich? d) Wie lange ist der Radius der Grund- und Gegenfläche? e) Wie groß ist die Umfläche des Baumstammes, wenn π zu 3,14 genommen wird?

Lösung.

A. Aus dem Inhalte des Baumstammes und dessen Höhe wird die mittlere Durchschnittsfläche berechnet.

B. Die mittlere Durchschnittsfläche ist das arithmetische Mittel der Grund- und Deckfläche. Da das geometrische Mittel derselben angegeben ist, so kann deren Einzelgröße bestimmt werden.

D. Kennt man die Größe der Kreise, so lassen die Radien sich leicht bestimmen.

E. Die Umfläche ist das Produkt aus dem Umkreise der mittleren Durchschnittsfläche in die Länge des Stammes.

Ausführung.

A. Die mittlere Durchschnittsfläche ist $5,428746 : 8,5 = 0,638676$ qm, dessen Radius 0,45 m und dessen Umkreis 2,826 m.

B. Da die Durchschnittsfläche das arithmetische Mittel der Grund- und Gegenfläche ist, so ist die Summe der letzteren $F + f = 1,277352$ qm.

C. Die Größe von $F = \frac{1,277352 \times 64}{(64 + 49)} = 0,723456$ qm und von $f = \frac{1,277352 \times 49}{113} = 0,553896$ qm.

D. Der Radius (R) der Grundfläche ist $R = \sqrt{\frac{1,277352 \times 64}{113 \times 3,14}} = \sqrt{0,0036 \times 64} = 0,06 \times 8 = 0,48$. Der Radius (r) der Gegenfläche ist $r = 0,48 \times \frac{7}{8} = 0,42$. (Kürzer: $R = 0,90 \times \frac{8}{15} = 0,48$ m.)

E. Die Umhüllung ist $(0,48 + 0,42) \times 3,14 \times 8,5 = 24,0210$ qm.

3. Oberfranken. 1885.

Eine eiserne Pfanne hat die Form eines geraden abgestumpften Kegels; wenn nun die Seitenwand derselben 50,868 qdm Eisenblech in Anspruch nahm, ferner die untere Bodenweite sich zur oberen wie 1 : 3 verhält und die Seitenlinie 4,5 dm mißt, wie viele Liter Wasser kann die Pfanne fassen? ($\pi = 3,14$.)

Lösung.

I. Aus dem gegebenen Flächeninhalte und der Höhe des Mantels (d. h. der Seitenhöhe [ED Fig. 36] des abgestumpften Kegels) kann man das arithmetische Mittel der Umfänge und durch Vereinfachung die Summe der Radien der beiden Grundkreise berechnen.

II. Aus dieser Summe werden die beiden Radien (R und r) bestimmt.

III. Kennt man die Radien, so wird aus der Seitenlinie des abgestumpften Kegels und der Differenz der Radien die Kegelhöhe ($ME = h$) berechnet.

IV. Der Inhalt wird gefunden nach der Formel $V = \frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

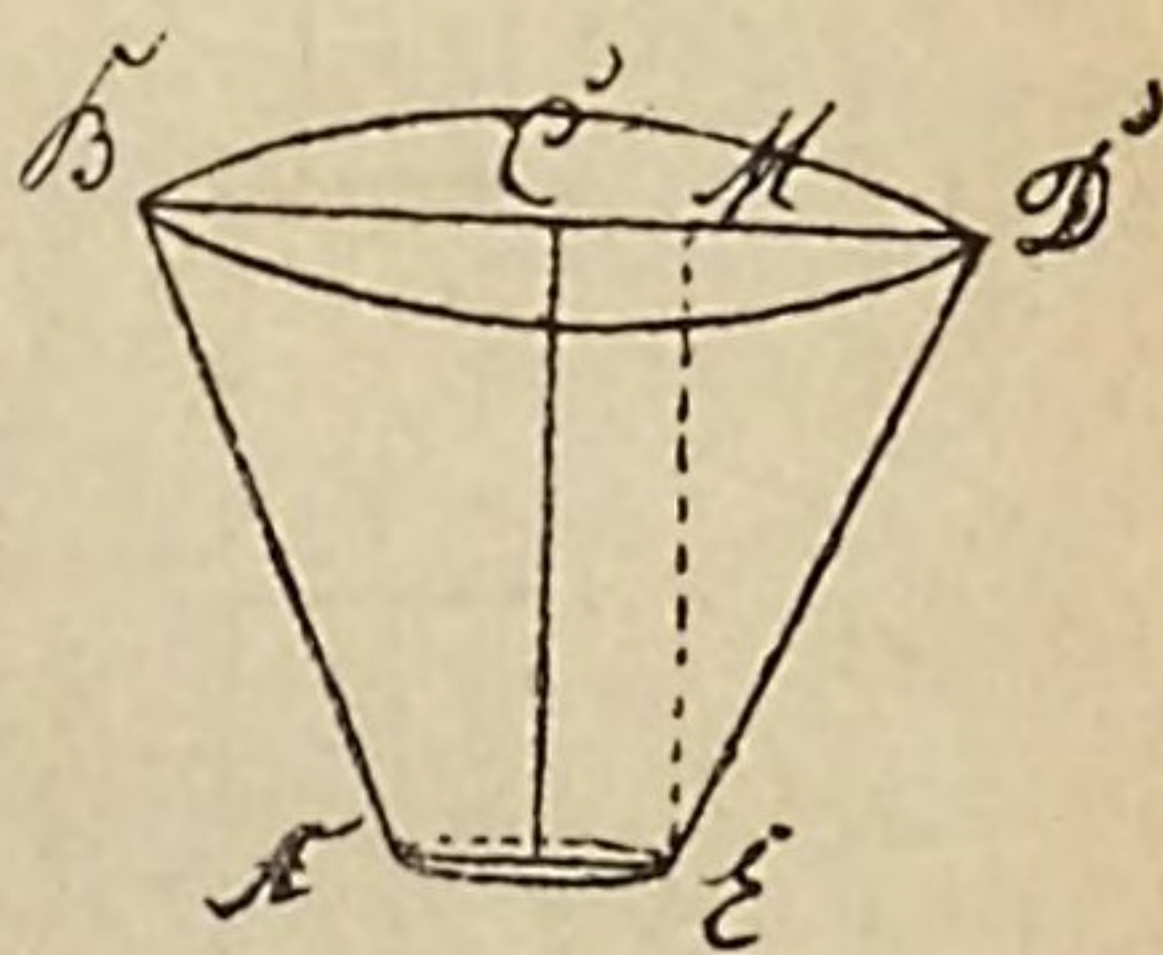


Fig. 36.

Ausführung.

$$\text{I.} \quad (R + r) \pi \times 4,5 = 50,868 \text{ qdm}$$

$$R + r = \frac{50,868}{4,5 \times 3,14} = 3,6$$

$$\text{II.} \quad 3r + r = 3,6 \text{ dm}$$

$$r = 0,9 \text{ dm} \quad R = 2,7 \text{ dm.}$$

$$\text{III.} \quad h = \sqrt{(4,5)^2 - (1,8)^2} = \sqrt{9^2 \times (0,5)^2 - 9^2 \times (0,2)^2}$$

$$h = 9 \sqrt{0,25 - 0,04} = 9 \sqrt{0,21}$$

$$h = 9 \times 0,4583 = 4,1247 \text{ dm.}$$

$$\text{IV.} \quad V = \frac{9 \times 0,4583 \times 3,14}{3} [(3 \times 0,9)^2 + (3 \times 0,9) \times 0,9 + (0,9)^2]$$

$$V = 3 \times 0,4583 \times 3,14 \times (0,9)^2 \times 13$$

$$V = 45,46 \text{ Liter.}$$

Antwort: Die Pfanne faßt 45,46 Liter.

4. Mittelfranken. 1882.

Wie viel Quadratmeter hält die Rindenfläche eines Fichtenstammes, welcher kegelförmig gewachsen und senkrecht zur Achse abgeschnitten ist, wenn er an dem einen Ende 1,2 m, an dem anderen 0,4 m dick ist, und die Achse dieses abgestumpften Kegels 12,5 m mißt? ($= 3,14$)

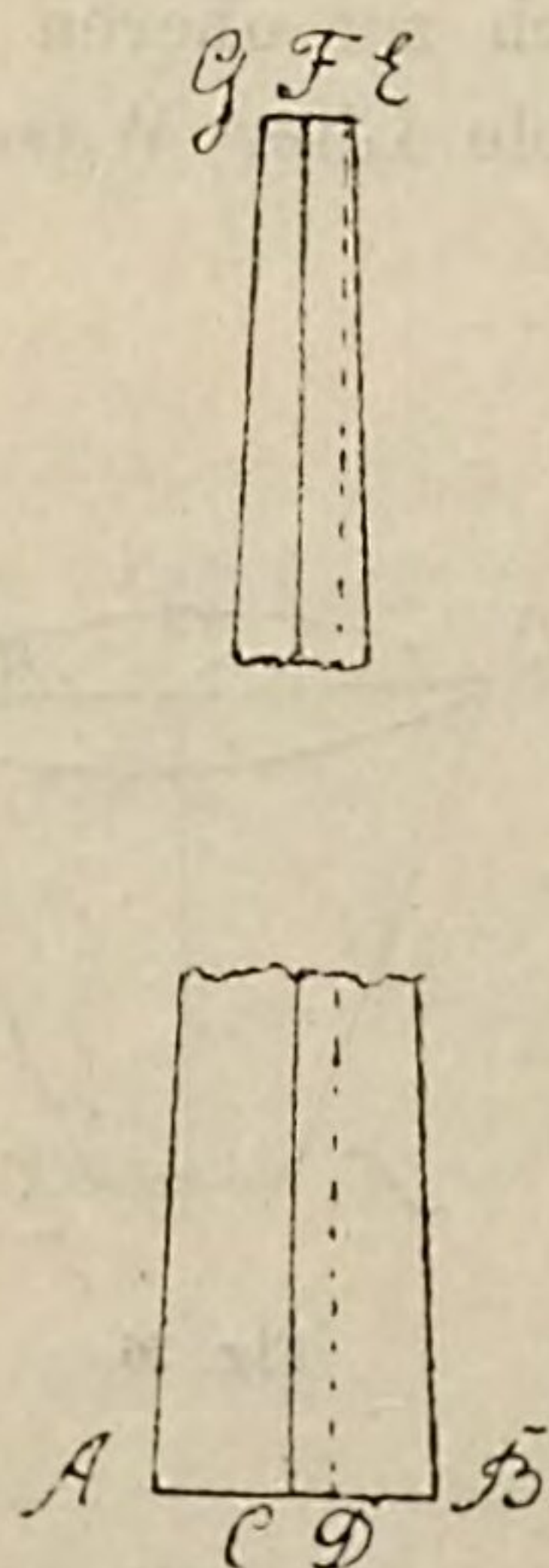


Fig. 37.

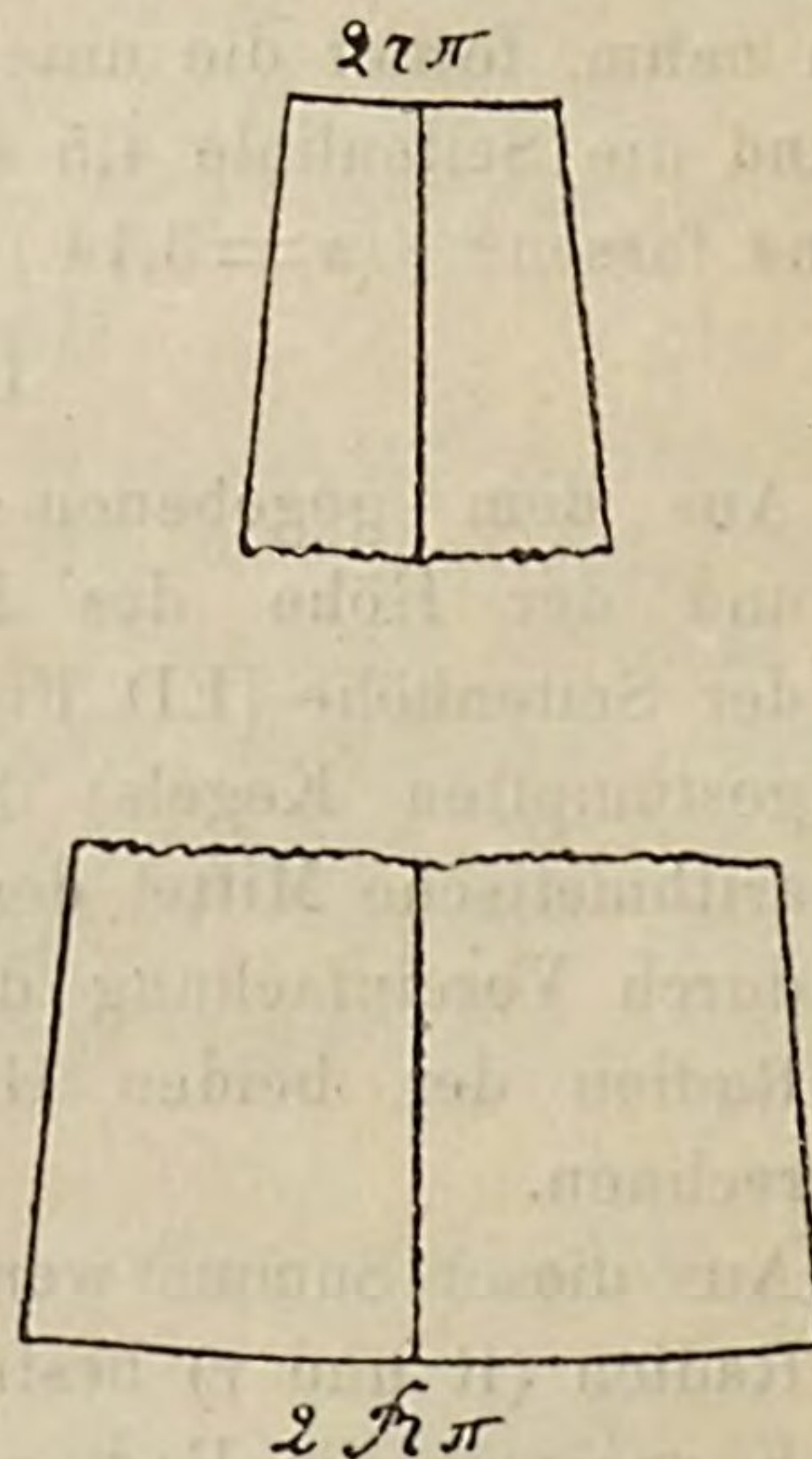


Fig. 38.

I. ABEG (Fig. 37) sei der Längsschnitt durch die Achse des Stammes, $EF = r = 0,2 \text{ m}$ und $CB = 0,6 \text{ m} = R$.

- II. Die abgerollte Rinde wird als Trapez (Fig. 38) berechnet, dessen parallele Seiten $2r\pi$ und $2R\pi$, dessen Höhe EB ist.
 III. Da EB nicht gegeben ist, so muß es als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieckes DBE berechnet werden.

Ausführung.

$$\text{III.} \quad BE = \sqrt{(ED)^2 + (BD)^2} = \sqrt{(12,5)^2 + (0,4)^2}$$

$$BE = \sqrt{156,41} = 12,5064.$$

$$\text{II.} \quad T = \frac{(2r\pi + 2R\pi)}{2} \times BE = (r + R)\pi \times BE$$

$$T = 0,8 \times 3,14 \times 12,5064 = 31,42 \text{ (genauer } 31,4160768 \text{ m)}$$

Antwort: Die Rindenfläche hält 31,42 qm.

5. Pfalz. 1890.

Ein kupfernes Gefäß von der Form eines Kegelstumpfes faßt 45,4672 Liter. Was kostet die Anfertigung dieses Gefäßes, wenn der Grundflächenradius 11 cm und der Deckflächenradius 4 cm mißt, und wenn 1 qdm Kupferblech zu 2 M gerechnet wird?

Lösung.

Zuerst wird die Höhe (MC Fig. 39), hierauf die Seitenlinie (AD), dann der Inhalt der Oberfläche (O) und schließlich der Preis (P) gesucht.

$$\text{I.} \quad \frac{MC}{3} \times 3,14 [1,21 + 1,1 \times 0,4 + 0,16] = 45,4672$$

$$MC = \frac{45,4672 \times 3}{3,14 \times 1,81} = 24 \text{ dm.}$$

$$\text{II.} \quad \overline{AD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{AH}^2$$

$$AD = \sqrt{(24)^2 + (0,7)^2} = 24,01 \text{ dm.}$$

III. Die Oberfläche O ist

$$O = (1,1)^2 \pi + (0,4)^2 \pi + (1,1 + 0,4) \pi \times 24,01$$

$$O = (1,21 + 0,16 + 36,015) \times 3,14 = 114,2489 \text{ qdm.}$$

IV. Die Kosten P betragen

$$P = 114,2489 \times 2 = 228,50 \text{ M.}$$

Antwort: Das Gefäß mit Deckel kostet 228,50 M., ohne Deckel 227,50 M.

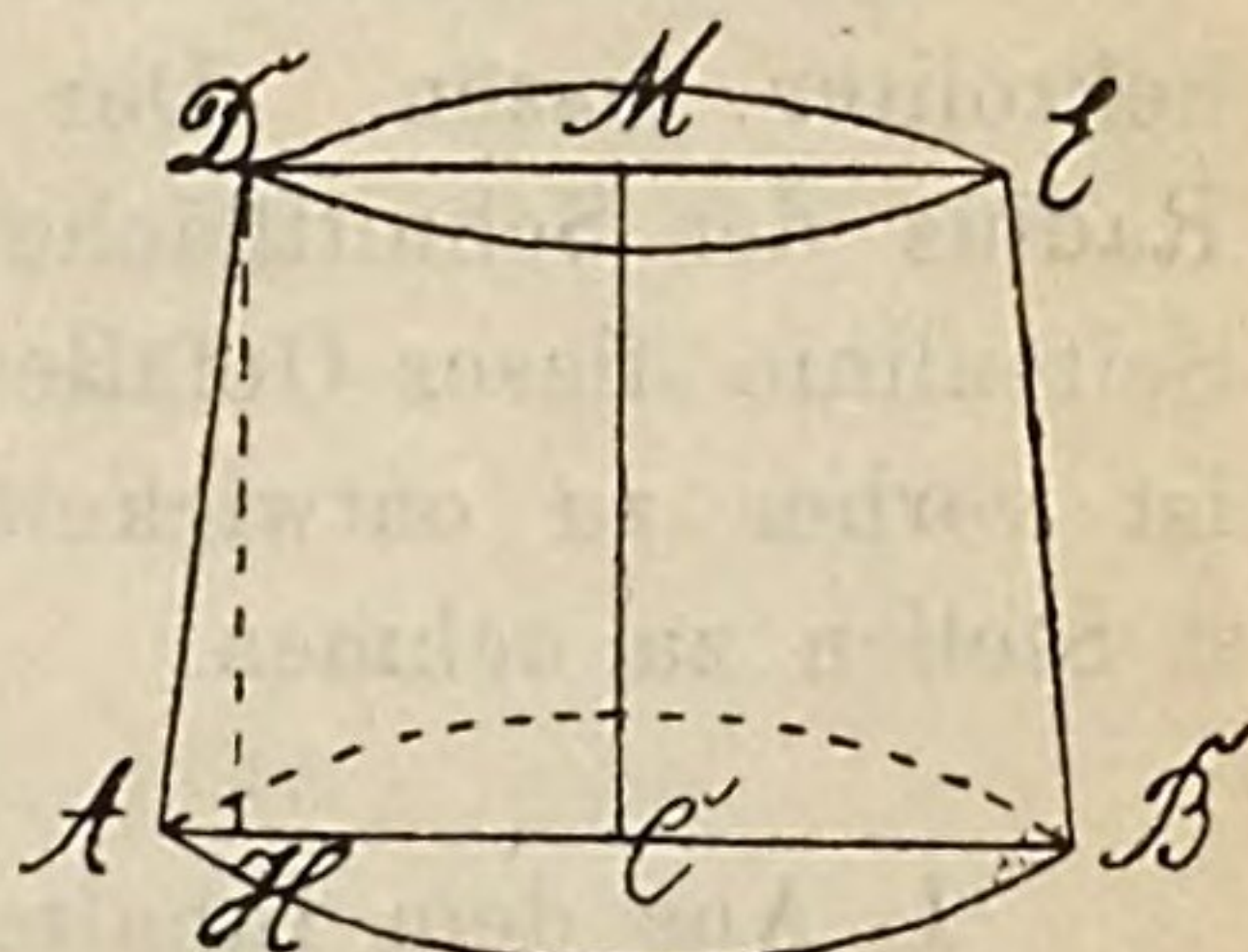


Fig. 39.

3. Oberpfalz. 1891.

An einem Kegelstumpf mit 299719,28 ccm Inhalt mißt die Höhe 84, die Seitenlinie 85 cm. Wie groß sind die Radien der Grundflächen?

L ö s u n g.

- I. Da die Größe von $AD=85$ cm und von $DH=84$ cm angegeben ist, so wird zunächst AH (Fig 39) gesucht. Es ist $AH=\sqrt{(85)^2-(84)^2}=\sqrt{169}=13$ cm.
- II. Bezeichnet R den Radius der Grundfläche (AC) und r der Radius der Deckfläche (DM), so ist $R=13+r$.
- III. Der Ausdruck für den Inhalt ist nun

$$V=\frac{\pi}{3} \times 3,14 [(13+r)^2 + (13+r)r + r^2] = 299719,28 \text{ cm}^3$$

$$169 + 26r + r^2 + 13r + r^2 + r^2 = 3409$$

$$3r^2 + 39r = 3240$$

$$r^2 + 13r + (\frac{13}{2})^2 = 1080 + \frac{169}{4}$$

$$(r + \frac{13}{2})^2 = \frac{4489}{4}$$

$$r = -\frac{13}{2} \pm \frac{67}{2}$$

$$r_1 = 27 \text{ cm}$$

$$R = 40 \text{ cm.}$$

Antwort: Die beiden Radien sind 40 cm und 27 cm.

2. Oberpfalz. 1892.

Ein Fruchtmaß von der Form eines Kegelstumpfes soll ein Doppelhektoliter fassen. Der Radius der Grundfläche wird zu 0,50 m, der Radius der Schnittfläche zu 0,30 m genommen. Wie groß muß die Seitenlinie dieses Gefäßes im lichten sein? (Die anzuwendende Formel ist vorher zu entwickeln. Die Dezimalbrüche und Wurzeln sind mit 3 Stellen zu nehmen.)

L ö s u n g.

- I. Aus dem Inhalte und den beiden Radien wird die Höhe des Fruchtmaßes (Fig. 39) berechnet, nämlich

$$\frac{MC}{3} \times \frac{\pi}{7} (5^2 + 5 \times 3 + 3^2) = 200$$

$$MC = \frac{200 \times 3 \times 7}{22 \times 49} = \frac{300}{77} \text{ dm.}$$

- II. Die Seitenlinie $AD = \sqrt{DH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{90000}{(77)^2} + (5-3)^2}$

$$AD = \sqrt{\frac{113716}{(77)^2}} = 4,379 \text{ dm.}$$

Antwort: Die Seitenlinie muß 4,38 dm groß sein.

3. Oberfranken. 1891.

Wie groß ist der Kubikinhalte eines abgekürzten Kegels, dessen Oberfläche 967,12 qcm beträgt, wenn der Unterschied zwischen den Halbmessern der Grund- und Deckfläche 8 cm und zwischen der Seitenlinie und Höhe 2 cm beträgt?

L ö s u n g.

- I. Im Dreiecke ADH (Fig. 39) ist die Seite $AH = 8$ cm.
 II. Bezeichnet man $AD = s$ und $DH = h$, so ist

$$\begin{array}{r} s^2 - h^2 = 64 \\ s - h = 2 \\ \hline (s + h)(s - h) = 64 \\ s + h = 32 \\ s - h = 2 \\ \hline s = 17 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm.} \end{array}$$

- III. Wenn man den Halbmesser der Grundfläche mit R , der Deckfläche mit r bezeichnet, so ist $R = (r + 8)$, und der Ausdruck für die Oberfläche (O) ist

$$\begin{aligned} O &= (r + 8)^2 \pi + r^2 \pi + (r + 8 + r) \pi \times s = 967,12 \\ r^2 + 16r + 64 + r^2 + 2r \times 17 + 8 \times 17 &= 308 \\ 2r^2 + 50r &= 108 \\ r^2 + \frac{50}{2}r + \left(\frac{25}{2}\right)^2 &= \frac{841}{4} \\ r + \frac{25}{2} &= \pm \frac{29}{2} \\ r_1 &= 2 \\ R &= 10. \end{aligned}$$

- IV. Der Kubikinhalt (V) ist

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 3,14 [(10)^2 + 10 \times 2 + 4] \\ V &= 1946,8 \text{ ccm.} \end{aligned}$$

Antwort: Der Inhalt des abgekürzten Kegels ist 1946,8 ccm.

Vermischte Aufgaben über Körper mit verschiedenen Begrenzungsflächen.

2. Oberpfalz. 1888.

Ein gleichseitiger Kegel hat eine Höhe von 3,46 cm. Wie groß ist die Kante eines inhaltsgleichen Würfels?

L ö s u n g.

- I. Wird der Radius der Grundfläche mit x cm bezeichnet, so ist die Seitenhöhe $2x$. Ferner ist
 II.

$$\begin{aligned} 4x^2 - x^2 &= (3,46)^2 \\ 3x^2 &= (3,46)^2 \\ x^2 &= \frac{(3,46)^2}{3} \end{aligned}$$

III. Der kubische Inhalt des Kegels ist $\frac{(3,46)^2}{3} \times \pi \times \frac{3,46}{3}$

III. Bezeichnet y die Würfelkante, so ist y der kubische Inhalt des Würfels. Gemäß der Aufgabe ist

$$y^3 = \frac{(3,46)^2}{3} \times \pi \times \frac{3,46}{3}$$

$$y^3 = (3,46)^3 \times \frac{\pi}{9}$$

$$y = 3,46 \times \sqrt[3]{0,349} = 3,46 \times 0,7$$

$$y = 2,422 \text{ cm.}$$

Antwort: Die Würfelkante ist 2,422 cm lang.

3. Pfalz. 1883.

Ein Würfel und ein Kegel haben bei gleicher Grundfläche auch gleichen Kubikinhalte. Wenn nun eine Würfelfläche 257,9236 qcm enthält: a) wie groß ist die Würfelkante? b) welches sind die Dimensionen des Kegels? c) wie viel beträgt die Differenz der Oberflächen der beiden Körper? ($\pi = 3,14$.)

Lösung.

- I. Da die Grundfläche des Würfels gegeben ist, so kann man die Würfelkante, die Oberfläche und das Volumen des Würfels berechnen.
- II. Aus der gegebenen Grundfläche und dem Inhalte des Kegels wird die Höhe des Kegels und aus der Grundfläche der Radius berechnet.
- III. Die Seitenhöhe des Kegels wird aus der Höhe und dem Radius der Grundfläche bestimmt.
- IV. Die Oberfläche des Kegels besteht aus Grundfläche und Mantel.

Ausführung.

A. Bezeichnet x die Größe der Würfelkante, so ist

$$x^2 = 257,9236$$

$$x = \sqrt{257,9236} = 16,06 \text{ cm.}$$

I. Wird die Höhe des Kegels mit h bezeichnet, so ist

$$\frac{257,9236 h}{3} = 257,9236 \times 16,06$$

$$h = 48,16 \text{ cm.}$$

II. Wenn man mit r den Radius der Grundfläche des Kegels bezeichnet, so ist

$$r^2 \pi = 257,9236$$

$$r = \sqrt{\frac{257,9236}{3,14}} = \sqrt{82,1412} = 9,06 \text{ cm.}$$

III. Die Seitenhöhe des Kegels (s) ist

$$s = \sqrt{82,1412 + (48,16)^2} = 49 \text{ cm.}$$

C. I. Die Oberfläche des Würfels (O) beträgt

$$O = 257,9236 \times 6 = 1547,5416 \text{ qcm.}$$

II. Die Oberfläche des Kegels (o) ist

$$o = 257,9236 + 9,06 \times 3,14 \times 49$$

$$o = 1393,9716 \text{ qcm.}$$

III. Die Differenz der Oberflächen (D) der beiden Körper beträgt

$$D = 1547,5416 - 1393,9716 = 153,57 \text{ qcm.}$$

Antwort: a) Die Würfelkante hat 16,06 cm; b) der Halbmesser der Grundfläche des Kegels ist 9,06 cm; die Höhe 48,16 cm und die Seitenhöhe 49 cm; c) die Oberfläche des Würfels ist um 153,57 qcm größer.

3. Niederbayern. 1886.

Ein regulär-dreieitiger Pyramidenstumpf hat eine Oberfläche von 1 qm. Die Kante der Grundfläche ist 5 dm, die der Deckfläche 1 dm groß. Wenn die Höhe der Seitenfläche gleich ist der Seitenhöhe eines Kegels von gleicher Oberfläche, wie groß ist dann der körperliche Inhalt des Kegels?

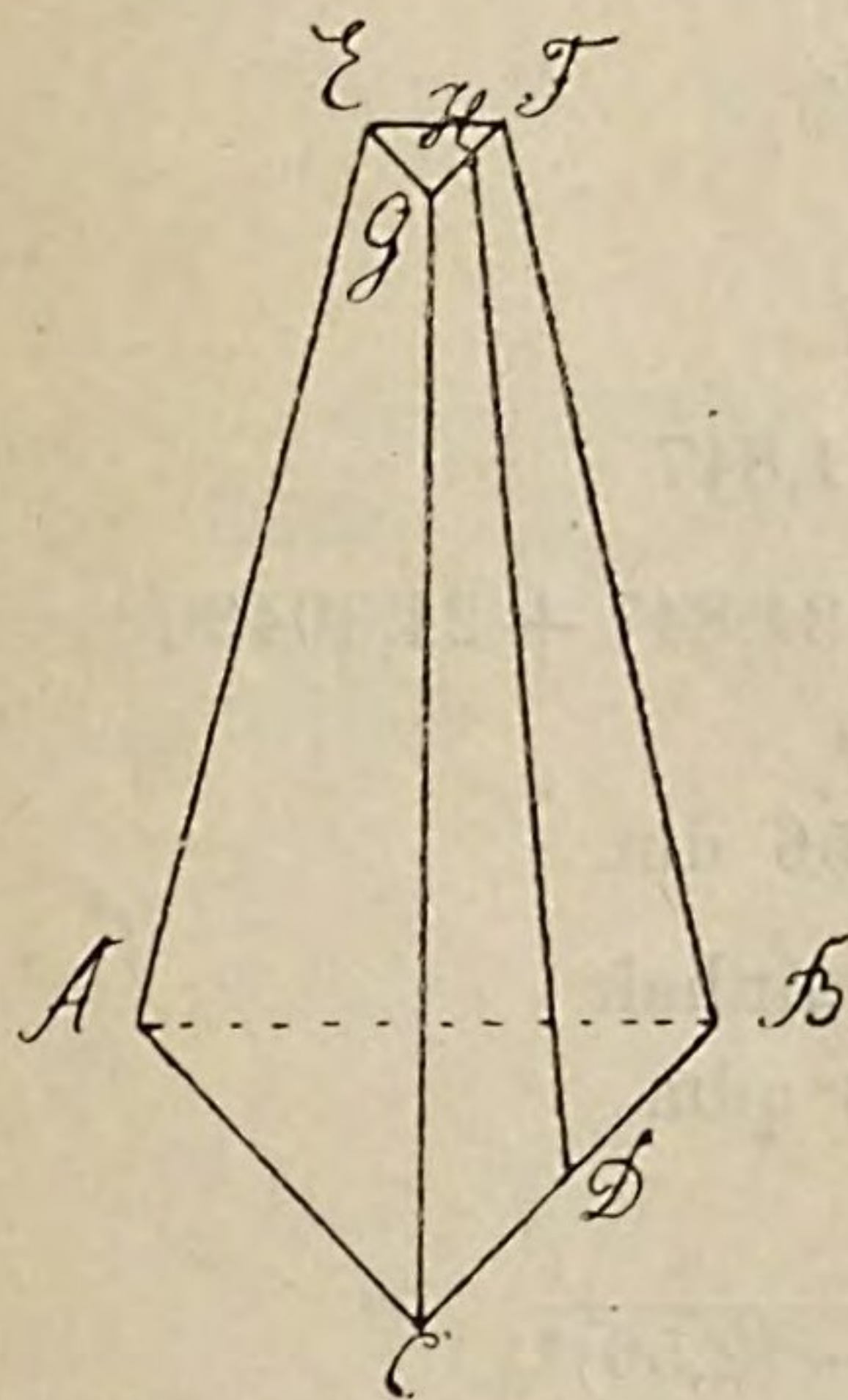


Fig. 40.

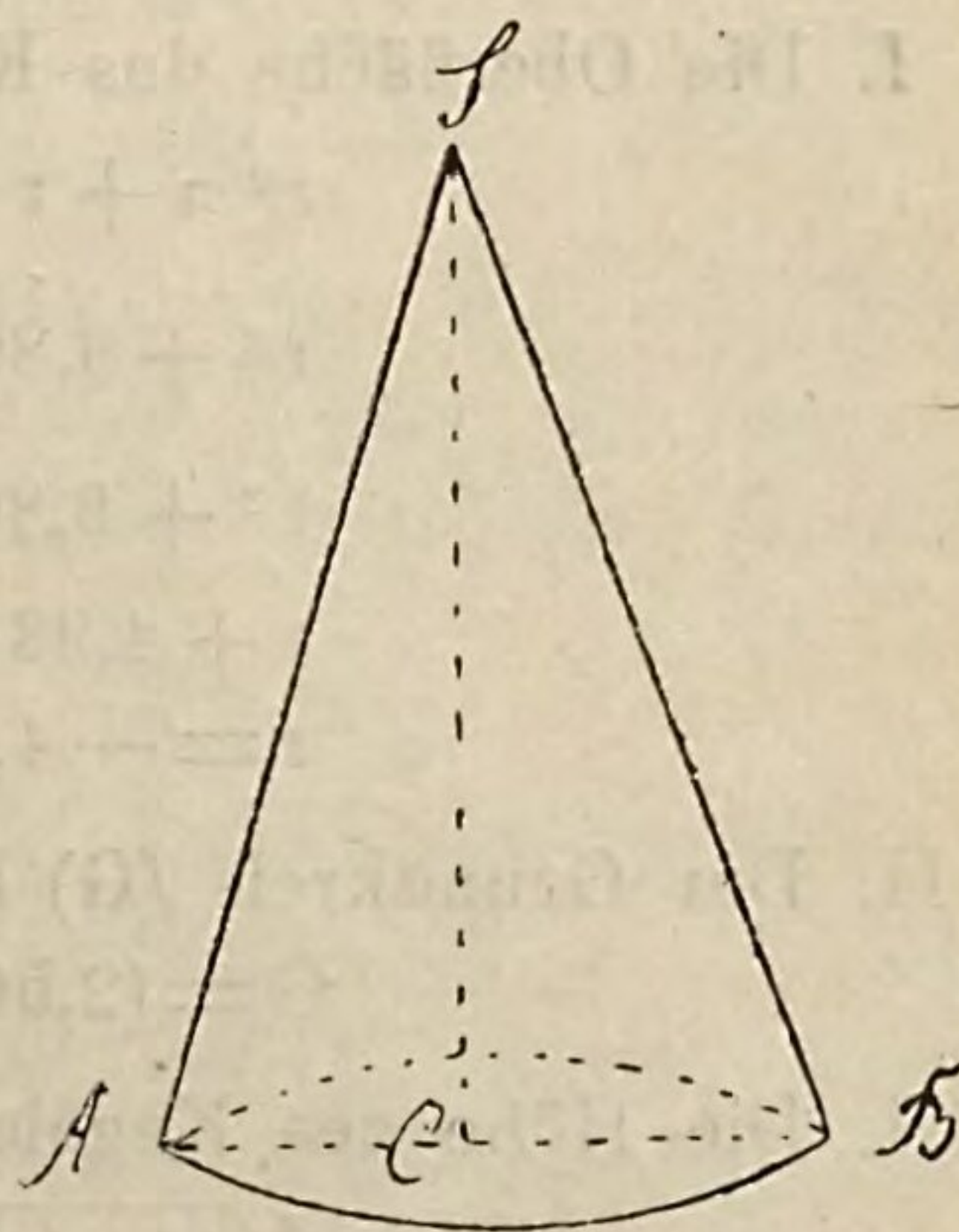


Fig. 41.

A. Da die Seiten der Grund- und Deckfläche gegeben sind, so kann man ihre Inhalte berechnen. Zieht man diese von der ganzen Oberfläche (100 qdm) ab, so bleibt der Flächeninhalt der drei Pyramidenseiten (Fig. 40). Jede derselben ist ein Paralleltapez,

deren parallele Seiten bekannt sind, weshalb die Höhe $DH = s$ leicht berechnet werden kann.

- B. Von dem Kegel (Fig. 41) ist hierauf die Seitenhöhe ($SB = s$) und die Oberfläche bekannt. Die Oberfläche wird vom Grundkreis ($r^2 \pi$) und vom Mantel ($r \pi s$) gebildet. Somit kann man r bestimmen, so daß man dann die Längen von r und s kennt. Sodann wird $CS = h$ gesucht, worauf man den Inhalt des Kegels (V) berechnet.

Ausführung.

- A. I. Der Inhalt der Grundfläche (F) ist

$$F = \frac{5^2}{4} \sqrt{3} = 25 \times 0,433 = 10,825 \text{ qdm.}$$

- II. Der Inhalt der Deckfläche (f) ist

$$f = \frac{1}{4} \sqrt{3} = 0,433 \text{ qdm.}$$

- III. Der Flächeninhalt jeder Seitenfläche (T) ist

$$T = \frac{100 - (10,825 + 0,433)}{3} = 29,581 \text{ qdm.}$$

- IV. Bezeichnet s die Seitenhöhe, so ist

$$\begin{aligned} \frac{(5 + 1)}{2} \times s &= 29,581 \\ s &= 9,86 \text{ dm.} \end{aligned}$$

- B. I. Die Oberfläche des Kegels ist

$$\begin{aligned} r^2 \pi + r \pi \times 9,86 &= 100 \\ r^2 + 9,86 r &= \frac{100}{3,14} = 31,847 \\ r^2 + 9,86 r + (4,93)^2 &= 31,847 + 24,3049 \\ r + 4,93 &= \pm \sqrt{56,1519} \\ r &= -4,93 + 7,49 = 2,56 \text{ dm.} \end{aligned}$$

- II. Der Grundkreis (G) hat den Flächeninhalt

$$G = (2,56)^2 \pi = 20,5783 \text{ qdm.}$$

- III. Die Höhe des Kegels (h) ist

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(9,86)^2 - (2,56)^2} \\ h &= \sqrt{12,42 \times 7,3} = 9,52 \text{ dm.} \end{aligned}$$

- IV. Der Inhalt des Kegels (J) beträgt

$$V = \frac{20,5783 \times 9,52}{3} = 65,301805 \text{ cdm.}$$

Antwort: Der Inhalt des Kegels ist 65,301805 cdm.

2. Niederbayern. 1884.

Die Grundkante einer regelmäßigen, vierseitigen Pyramide beträgt 1,5 m, die Höhe des Seitendreieckes derselben 12,5 dm. Um wie viel ist diese Pyramide größer als der in dieselbe eingeschriebene Kegel? ($\pi = 3,14$.)

Lösung.

Um die Inhalte der beiden genannten Körper zu berechnen, muß zuerst die Größe der Höhe (EC Fig. 42) gesucht werden.

I. $EC = \sqrt{(GE)^2 - (CG)^2}$

$$EC = \sqrt{(1,25)^2 - \left(\frac{1,5}{2}\right)^2} = \sqrt{(1,25)^2 - (0,75)^2}$$

$$EC = \sqrt{2 \times 0,5} = \sqrt{1} = 1 \text{ m.}$$

II. Der Inhalt der Pyramide (P) ist

$$P = \frac{(1,5)^2 \times 1}{3} = 0,75 \text{ cbm.}$$

III. Der Kubikinhalt des Kegels (K) beträgt

$$K = \left(\frac{1,5}{2}\right)^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{0,5 \times 1,5 \times 3,14}{4} = 0,588750 \text{ cbm.}$$

IV. Der Unterschied (D) der beiden Körper macht

$$D = 0,75 - 0,588750 = 0,161250 \text{ cbm.}$$

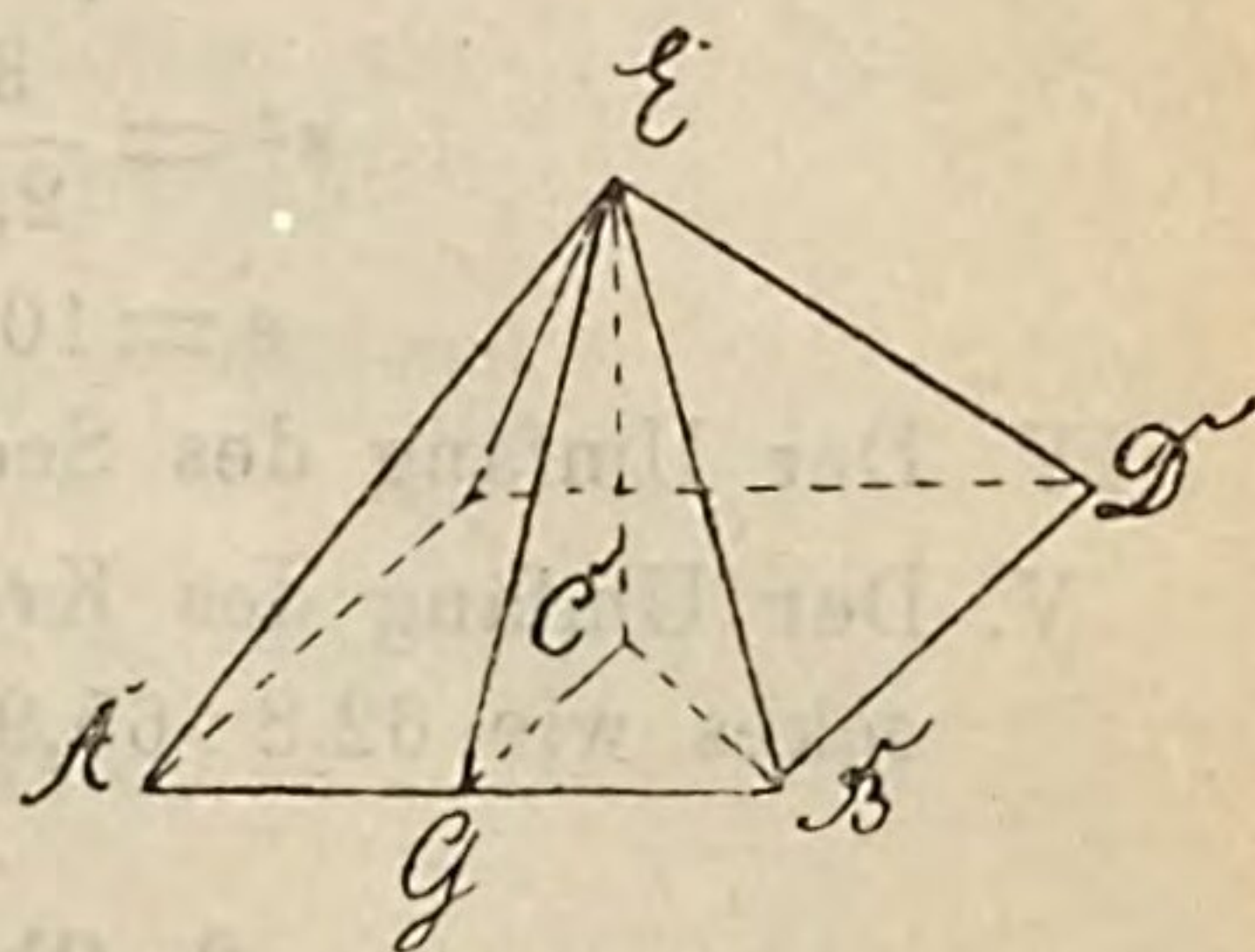


Fig. 42.

4. Oberbayern. 1895.

Auf einem Kreise von 20 cm Durchmesser steht ein Kegel von 36 cm Höhe. Um wie viele ccm ist dieser größer als eine auf dem eingeschriebenen Quadrate desselben Kreises stehende Pyramide von gleicher Höhe?

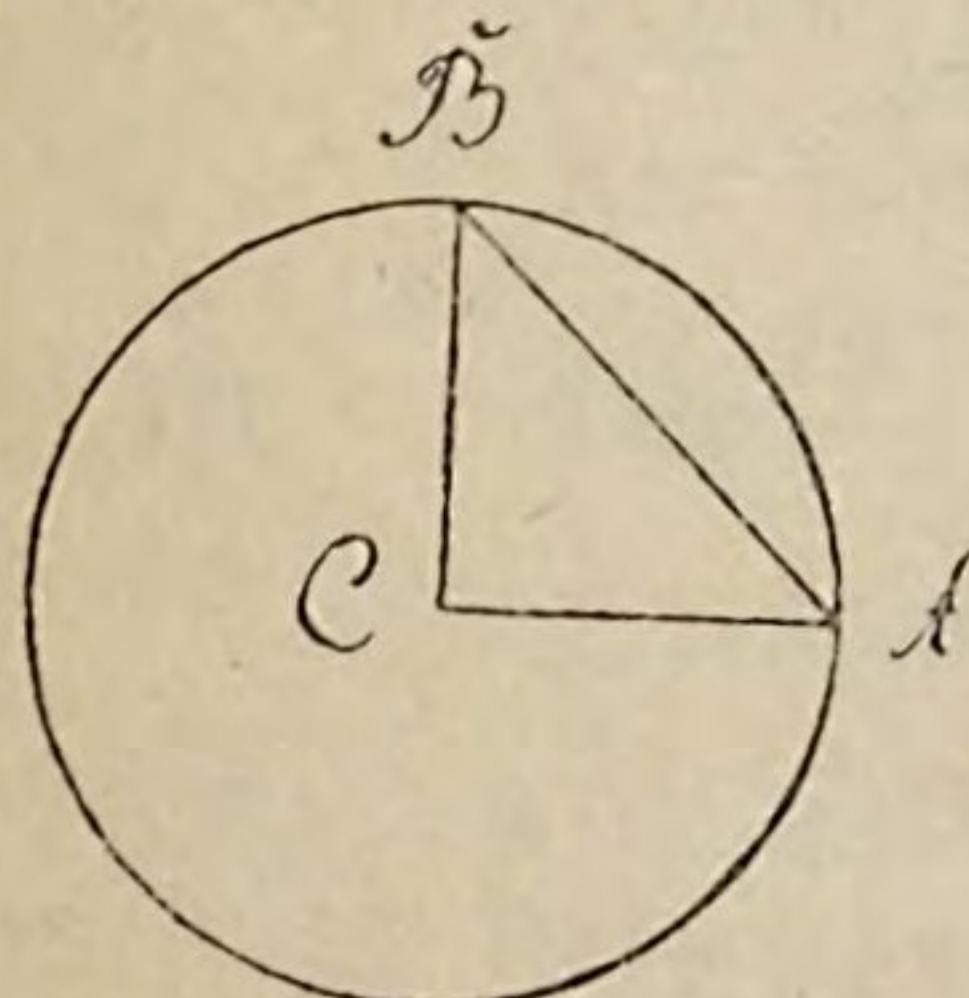


Fig. 43.

Lösung.

A. Der Kubikinhalt des Kegels beträgt

$$(10)^2 \pi \cdot 12.$$

B. Der Kubikinhalt der Pyramide ist (Fig. 43)

$$\overline{AB}^2 \times \frac{3,6}{3} = 2 \times \overline{AC}^2 \times 12 = 2 (10)^2 \times 12.$$

C. Der Unterschied der beiden Körper ist

$$(10)^2 \times 12 \times (3,14 - 2) = 12 \times 114 = 1368 \text{ ccm.}$$

3. Unterfranken. 1890.

Ein Kegel und eine sechsseitige Pyramide mit regulärer Grundfläche haben gleichen kubischen Inhalt, nämlich 1570 cbm und gleiche Höhe, nämlich 15 m. Wie verhalten sich die Umfänge ihrer Grundflächen?

Lösung.*)

- I. Da beide Körper gleichen Inhalt und gleiche Höhe haben, so sind auch die Inhalte der Grundflächen einander gleich. Jede derselben hat 314 qm.
- II. Bezeichnet r den Halbmesser des Grundkreises des Kegels, so ist $r^2 \pi = 314$, somit $r^2 = 100$ und $r = 10$.
- III. Der Umfang der Grundfläche des Kegels ist $2r\pi = 20 \times 3,14 = 62,8$ m.
- IV. Wird die Grundkante der sechsseitigen Pyramide mit s bezeichnet, so ist der Ausdruck für den Flächeninhalt

$$6 \times \frac{s^2}{4} \sqrt{3} = 314$$

$$s^2 = \frac{314}{2,598} = 120,8622$$

$$s = 10,993 \text{ m.}$$

- IV. Der Umfang des Sechseckes ist 65,958 m.

- V. Der Umfang des Kreises verhält sich zum Umfang des Sechseckes wie 62,8 : 65,958 oder 20 : 21.

2. Oberfranken. 1886.

Aus einem Baumstamm, dessen Endflächen einen Umfang von 11,304 m und 7,536 m besitzen, und dessen Seitenlinie 12,015 m mißt,

*) Wenn Inhalt und Höhe, somit auch die Grundflächen eines kreisförmigen Kegels und einer sechsseitigen Pyramide einander gleich sind, so hat die Grösse der Grundfläche keinen Einfluss auf das geometrische Verhältniss der Umfänge. Ist die Grösse der Grundfläche f , so ist

A. I. $r^2 \pi = f$

$$r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$$

II. Der Kreisumfang $= 2r\pi = 2\sqrt{f\pi}$

B. I. $\frac{3}{2} s^2 \sqrt{3} = f$

$$s^2 = \frac{2f}{3\sqrt{3}}$$

$$s = \sqrt{\frac{2f}{3\sqrt{3}}}$$

II. Der Umfang des Sechseckes $= 6 \sqrt{\frac{2f}{3\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2f\sqrt{3}}$

- C. Das Verhältniss des Kreisumfanges zum Perimeter des Sechseckes ist

$$2\sqrt{f\pi} : 2\sqrt{2f\sqrt{3}} = \sqrt{\pi} : \sqrt{3,464} = 1 : \sqrt{\frac{3,464}{3,141}} = 1 : 1,05$$

soll ein viereckiger Balken geschnitten werden, und zwar sollen die Quadrate, welche sich in die Grundflächen des Stammes einschreiben lassen, die beiden Grundflächen des Balkens werden. Wie viel beträgt der Abfall an Holz?

Lösung.

- I. Aus den Umfängen werden die Radien (R und r) der Endflächen berechnet.
- II. Hierauf wird die Länge des Stammes (h) gesucht.
- III. Sobald R , r und h gefunden sind, kann man den Inhalt (J) des Kegelstumpfes bestimmen.
- IV. Sodann werden die in die Grundflächen eingeschriebenen Quadrate (a^2 und b^2) berechnet.
- V. Hierauf wird der Inhalt der abgestumpften quadratischen Pyramide (i) bestimmt.
- VI. Der Unterschied der Inhalte (D) des Kegel- und Pyramidenstumpfes gibt den Abfall.

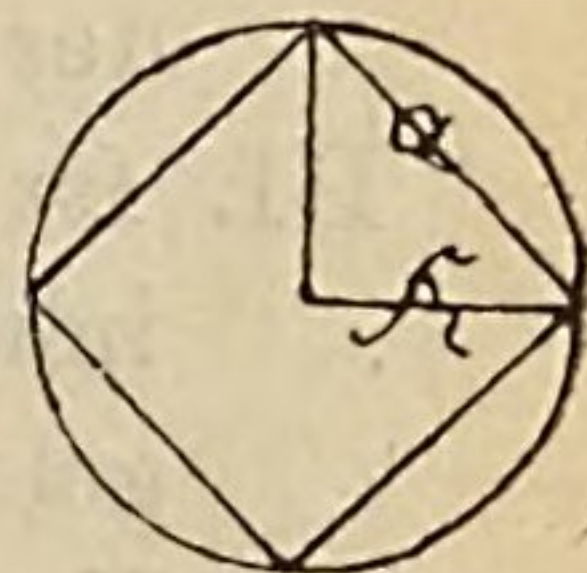
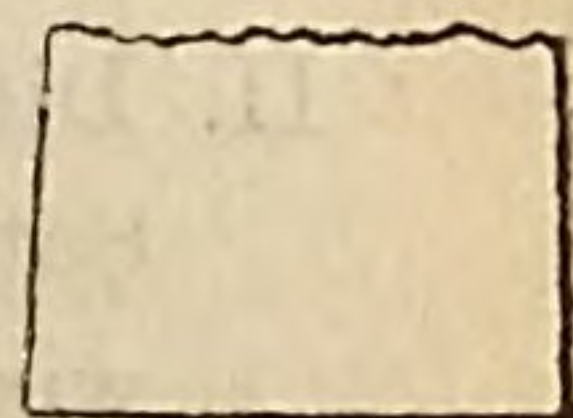
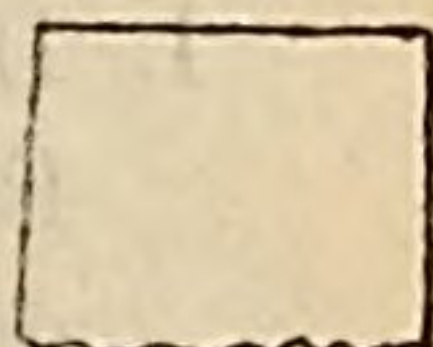


Fig. 44.

Ausführung.

- I. $2 R \pi = 11,304$
 $R = \frac{11,304}{6,28} = 1,8 \text{ m}$
 $2 r \pi = \frac{7,536}{6,28} = 1,2 \text{ m}$
- II. $h = \sqrt{(12,015)^2 - (1,8 - 1,2)^2}$
 $h = \sqrt{(12,015)^2 - (0,6)^2} = \sqrt{12,615 \times 11,415}$
 $h = 12 \text{ m.}$
- III. $J = \frac{12 \times 3,14}{3} [(1,8)^2 + 1,8 \times 1,2 + (1,2)^2]$
 $J = 85,910 \text{ cbm.}$
- IV. $a^2 = 2 R^2 = 2 \times 3,24$
 $b^2 = 2 r^2 = 2 \times 1,44.$
- V. $i = \frac{1}{3} [2 \times 3,24 + 2 \times 1,8 \times 1,2 + 2 \times 1,44]$
 $i = 8 \times 6,84 = 54,720 \text{ cbm.}$
- VI. $D = 85,910 - 54,720 = 31,190 \text{ cbm.}$

Antwort: Der Abfall beträgt 31,190 cbm.

6. Pfalz. 1884.

Ein gerader Metallkegel von 498,5064 qcm Basis und 36 cm Höhe wird 24 cm von der Grundfläche entfernt parallel mit dieser abgeschnitten, aus dem Kegelstumpfe der größtmögliche Cylinder gedreht und dieser durch alle Abfälle des ursprünglichen Kegels erhöht. a) Wie hoch wird der Cylinder? b) Wie stellt sich die Oberfläche des erhöhten Cylinders zu jener des ursprünglichen Kegels? $\pi=3,14$. (Die Resultate sind bis auf mm, beziehungsweise qmm zu bestimmen.)

Lösung.

- I. Da die Größe der Grundfläche und der Höhe des Kegels gegeben sind, so kann der körperliche Inhalt und damit das Volumen des Cylinders leicht berechnet werden.
- II. Die Größe der Schnittfläche wird nach dem Satze bestimmt, daß sich die beiden Flächen wie die Quadrate der Entfernungen von der Spitze verhalten.
- III. Ist einer der Radien aus dem Flächeninhalte berechnet, so wird der andere leicht gefunden.
- VI. Um die Oberfläche des Kegels zu bestimmen, muß vorher die Seitenhöhe (BD) berechnet werden.

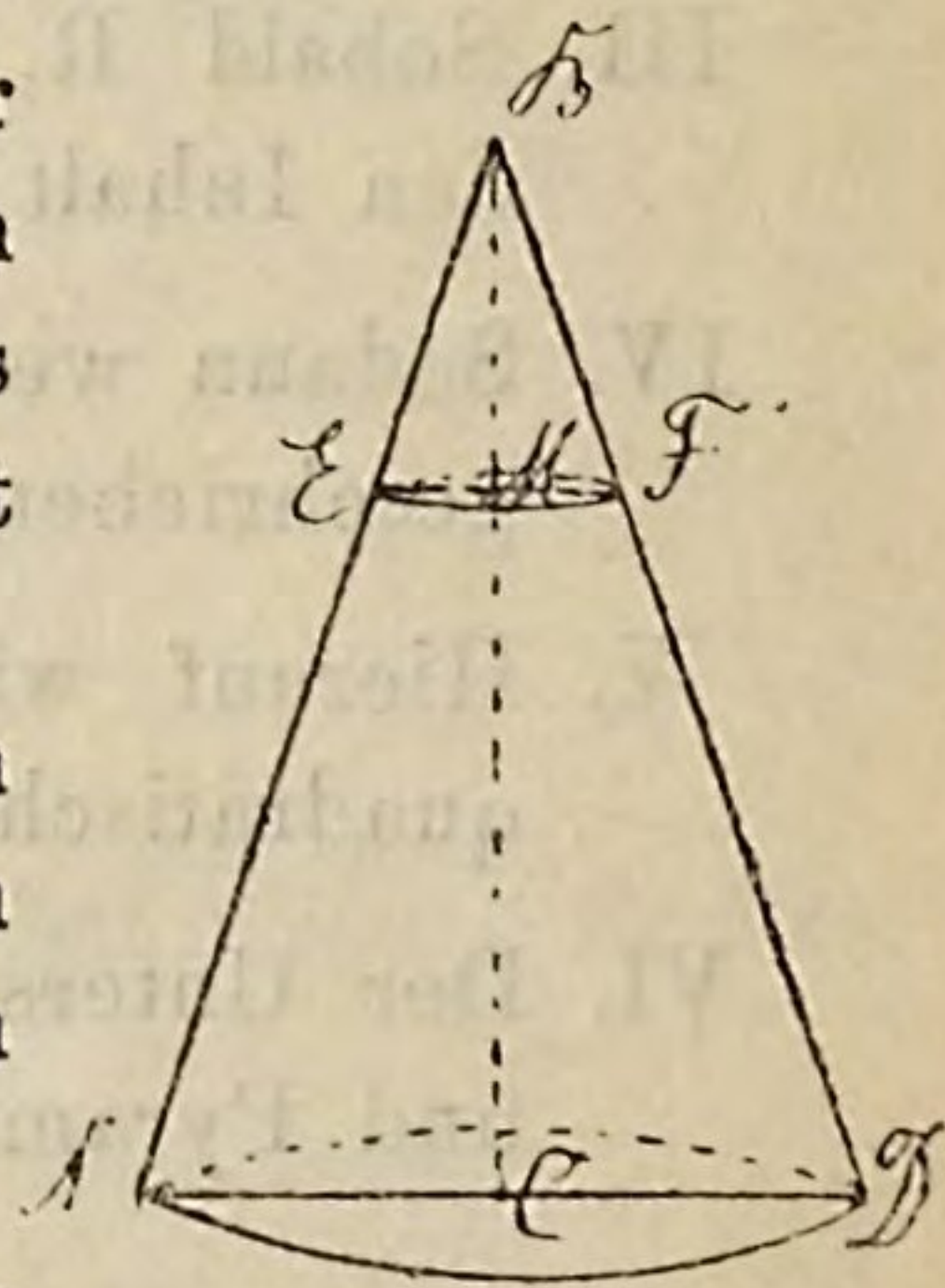


Fig. 45.

Ausführung.

- I. Der körperliche Inhalt des Kegels und Cylinders J beträgt

$$J = \frac{498,5064 \times 36}{3} = 5982,0768 \text{ ccm.}$$
- II. Die Größe der Schnittfläche sei g, dann ist

$$g : 498,5064 = (12)^2 : (36)^2$$

$$g = \frac{498,5064}{9} = 55,3896 \text{ qcm.}$$
- III. Ist r der Radius der Schnittfläche, so ist

$$r^2 = \frac{55,3896}{3,14} = 17,64$$

$$r = \sqrt{17,64} = 4,2 \text{ cm.}$$
- IV. Bezeichnet R den Radius der Grundfläche, dann ist

$$R = 4,2 \times 3 = 12,6 \text{ cm.}$$

V. Wenn man die Höhe des Cylinders mit h bezeichnet, so ist

$$55,3896 h = 5982,0768 \text{ oder}$$

$$(4,2)^2 \pi h = \frac{(12,6)^2 \pi \cdot 36}{3}$$

$$h = 9 \times 12 = 108 \text{ cm.}$$

VI. Die Seitenhöhe des Kegels BD ist

$$BD = \sqrt{(36)^2 + (12,6)^2}$$

$$BD = \sqrt{9^2 \times 16 + 9^2 \times (1,4)^2}$$

$$BD = 9 \sqrt{16 + 1,96} = 9 \times 4,238 = 38,142 \text{ cm.}$$

VII. Die Oberfläche des Kegels (o) beträgt

$$o = 498,5064 + 12,6 \times 3,14 \times 38,14$$

$$o = 498,5064 + 1508,97096$$

$$o = 2007,47736 \text{ qcm.}$$

VIII. Die Oberfläche des Cylinders (O) ist

$$O = 2 \times 55,3896 + 2 \times 4,2 \times 3,14 \times 108$$

$$O = 110,7792 + 2848,608$$

$$O = 2959,3872 \text{ qcm.}$$

IX. Die Oberfläche des Cylinders ist größer um

$$D = 2959,3872 - 2007,4774 = 951,9098 \text{ qcm.}$$

Antwort: a) Die Höhe des Cylinders ist 108 cm. b) Die Oberfläche des Cylinders ist um 951,9098 qcm größer als die Oberfläche des Kegels.

3. Niederbayern. 1894.

Ein Kegel hat den Radius 12 dm. Wie groß ist die Höhe des Kegels, wenn seine Oberfläche gleich dem Mantel eines Cylinders von halb so großer Höhe und 4mal so großer Grundfläche ist?

Lösung.

I. Die zur Berechnung des Kegelmantels erforderliche Seitenhöhe $SB = s = \sqrt{x^2 + (12)^2}$, wobei $SC = x$ (Fig. 46) die Höhe des Kegels bezeichnet.

II. Die Oberfläche des Kegels (O) ist

$$O = (12)^2 \pi + 12 \pi \sqrt{x^2 + (12)^2}$$

III. Da die Grundfläche des Cylinders 4mal größer ist als diejenige der Kegelgrundfläche, so ist der Radius des Cylinders $2 \times 12 = 24 \text{ dm.}$

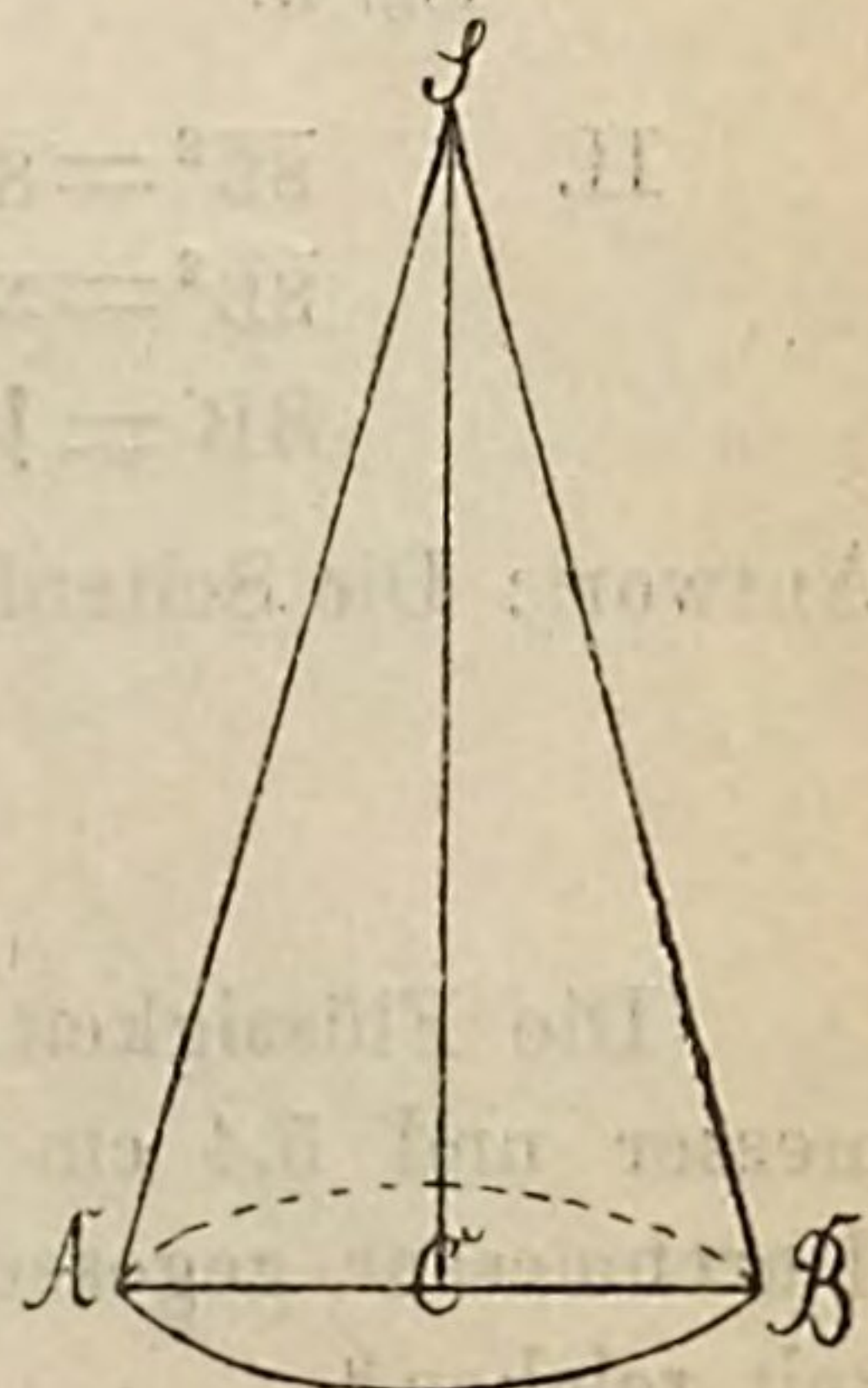


Fig. 46.

IV. Die Fläche des Cylindermantel (ebenfalls = 0) ist

$$0 = 2 \times 24 \times \pi \times \frac{x}{2} = 24 \pi x$$

V. Gemäß der Angabe ist

$$(12)^2 \pi + 12 \pi \sqrt{x^2 + (12)^2} = 24 \pi x$$

$$VI = V : 12 \pi \quad 12 + \sqrt{x^2 + (12)^2} = 2x$$

$$\sqrt{x^2 + (12)^2} = 2x - 12$$

$$x^2 + (12)^2 = (2x - 12)^2 = 4x^2 - 48x + (12)^2$$

$$x^2 = 4x^2 - 48x$$

$$48x = 3x^2$$

$$16 = x$$

Antwort: Die Höhe des Kegels beträgt ~~16~~ 4 dm.

2. Oberpfalz. 1890.

Der Mantel eines gleichseitigen Cylinders beträgt 1133,54 qcm. Zu suchen ist die Seitenlinie des in letzteren eingeschriebenen senkrechten Kegels.

Lösung.

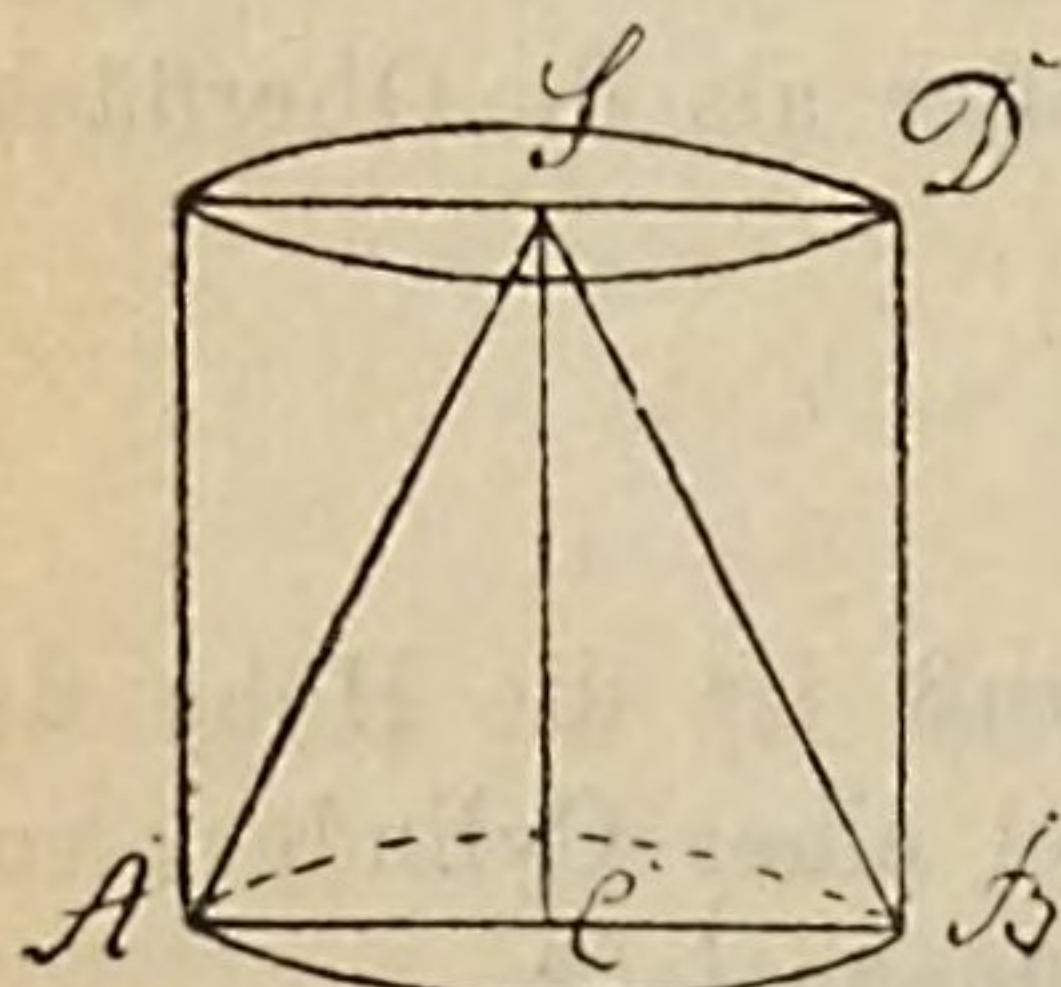


Fig. 47.

I. Aus der Größe des Mantels des gleichseitigen Cylinders können der Halbmesser $AC = x$ der Grund- und Deckfläche (Fig. 47) und die Höhe des Cylinders $BD = AB = 2x$ bestimmt werden, nämlich

$$2x \pi \cdot 2x = 1133,54$$

$$x^2 = \frac{1133,54}{12,56} = 90,25$$

$$x = 9,5 \text{ cm.}$$

$$II. \quad \overline{SB}^2 = \overline{SD}^2 + \overline{DB}^2$$

$$\overline{SB}^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2 = 5 \times 90,25$$

$$SB = \sqrt{5 \times 90,25} = 9,5 \sqrt{5} = 21,242 \text{ cm.}$$

Antwort: Die Seitenlinie des eingeschriebenen Kegels ist 21,242 cm lang.

4. Unterfranken. 1892.

Die Flüssigkeit in einem kegelförmigen Gefäße von 8,4 cm Durchmesser und 5,4 cm Höhe soll in ein cylindrisches Gefäß von 4,6 cm Durchmesser gegossen werden; bis zu welcher Höhe wird die Flüssigkeit reichen?

Lösung.

Der Kubikinhalt des cylindrischen Raumes, den das Wasser einnimmt, muß dem Volumen des kegelförmigen Gefäßes gleich sein. Ist die Höhe der cylindrischen Wassersäule x , so ist

$$(2,3)^2 \pi \cdot x = \frac{(4,2)^2 \pi \cdot 5,4}{3}$$

$$x = \frac{(4,2)^2 \times 1,8}{(2,3)^2} = 6 \text{ cm.}$$

Antwort: Die Flüssigkeit reicht 6 cm hoch.

5. Pfalz. 1892.

Aus einem Bleikegel von 38 cm Durchmesser und 96 cm Mantelhöhe soll eine Röhre gegossen werden, welche eine lichte Weite von $3\frac{1}{2}$ cm und eine Wandstärke von $1\frac{1}{2}$ cm hat; wie lange wird die Röhre?

Lösung.

Das Volumen des Bleikegels und die Menge des Bleies der Hohlröhre sind einander gleich. Bezeichnet man mit x cm die Länge der Röhre, so ist das Volumen der Masse der Röhre $[(\frac{7}{4} + \frac{3}{2})^2 \pi - (\frac{7}{4})^2 \pi] x$ und dasjenige des Kegels $(19)^2 \pi \times \frac{1}{3} \sqrt{(96)^2 - (19)^2}$. Somit ist

$$\left[\left(\frac{13}{4} \right)^2 - \left(\frac{7}{4} \right)^2 \right] \pi x = \frac{(19)^2}{3} \pi \sqrt{(96)^2 - (19)^2}$$

$$\frac{20}{4} \times \frac{6}{4} \times x = \frac{(19)^2}{3} \sqrt{115 \times 77}$$

$$5 \times \frac{3}{2} \times x = \frac{361}{3} \times 94,11$$

$$x = \frac{361 \times 188,22}{45}$$

$$x = 1509,74 \text{ cm.}$$

Antwort: Die Röhre wird 15,0974 m lang.

5. Pfalz. 1891.

Wie groß sind Inhalt und Oberfläche eines Kegelstumpfes, dessen Körperhöhe 24 cm, dessen Seitenhöhe 25 cm und Deckenradius 5 cm mißt? In welchem Verhältnisse stehen die Inhalte der beiden Abschnitte zu einander, wenn dieser Kegelstumpf in einer Höhe von 15 cm parallel zur Grundfläche geschnitten wird?

Lösung.

A. I. Um den Inhalt berechnen zu können, muß zuerst der Radius der Grundfläche $CB = R$ gesucht werden. Nun ist

$$CB = ME + HB.$$

II. Zur Berechnung von HB hat man $BE = 25$ und $EH = 24$; somit ist $HB = \sqrt{(25)^2 - (24)^2} = 7$ cm, folglich $R = 12$ cm.

III. Der körperliche Inhalt (V) ist

$$V = \frac{24}{3} \times 3,14 [(12)^2 + 12 \times 5 + 25] = 5752,48 \text{ ccm.}$$

IV. Die Oberfläche (O) beträgt

$$O = (12)^2 \pi + 5^2 \pi + (12 + 5) \pi \times 25$$

$$O = 1865,16 \text{ qcm.}$$

B. I. Um das Verhältnis der Inhalte beider Abschnitte zu bestimmen, muß zunächst das Volumen des einen derselben gesucht werden. Hierzu ist nötig, den Halbmesser $NL = NK + KL = 5 + KL$ zu bestimmen. Nun ist

$$EH : EK = HB : KL$$

$$24 : 9 = 7 : KL$$

$$KL = \frac{21}{8}$$

Somit ist $NL = \frac{61}{8}$ cm.

II. Der Inhalt des kleineren Stückes (v) ist

$$v = \frac{9}{3} \times 3,14 [(\frac{61}{8})^2 + \frac{61}{8} \times 5 + 25]$$

$$v = 1142,323 \text{ ccm.}$$

Der Inhalt des größeren Abschnittes ist

$$5752,48 - 1142,323 = 4610,157.$$

III. Die Inhalte beider Abschnitte verhalten sich zu einander wie $1142323 : 4610157$ oder annähernd $1 : 4$.

Antwort: Der Inhalt des ganzen Kegelstumpfes ist **5752,48 ccm**, die Oberfläche **1865,16 qcm**. Das geometrische Verhältnis der beiden Abschnitte ist annähernd **1 : 4**.

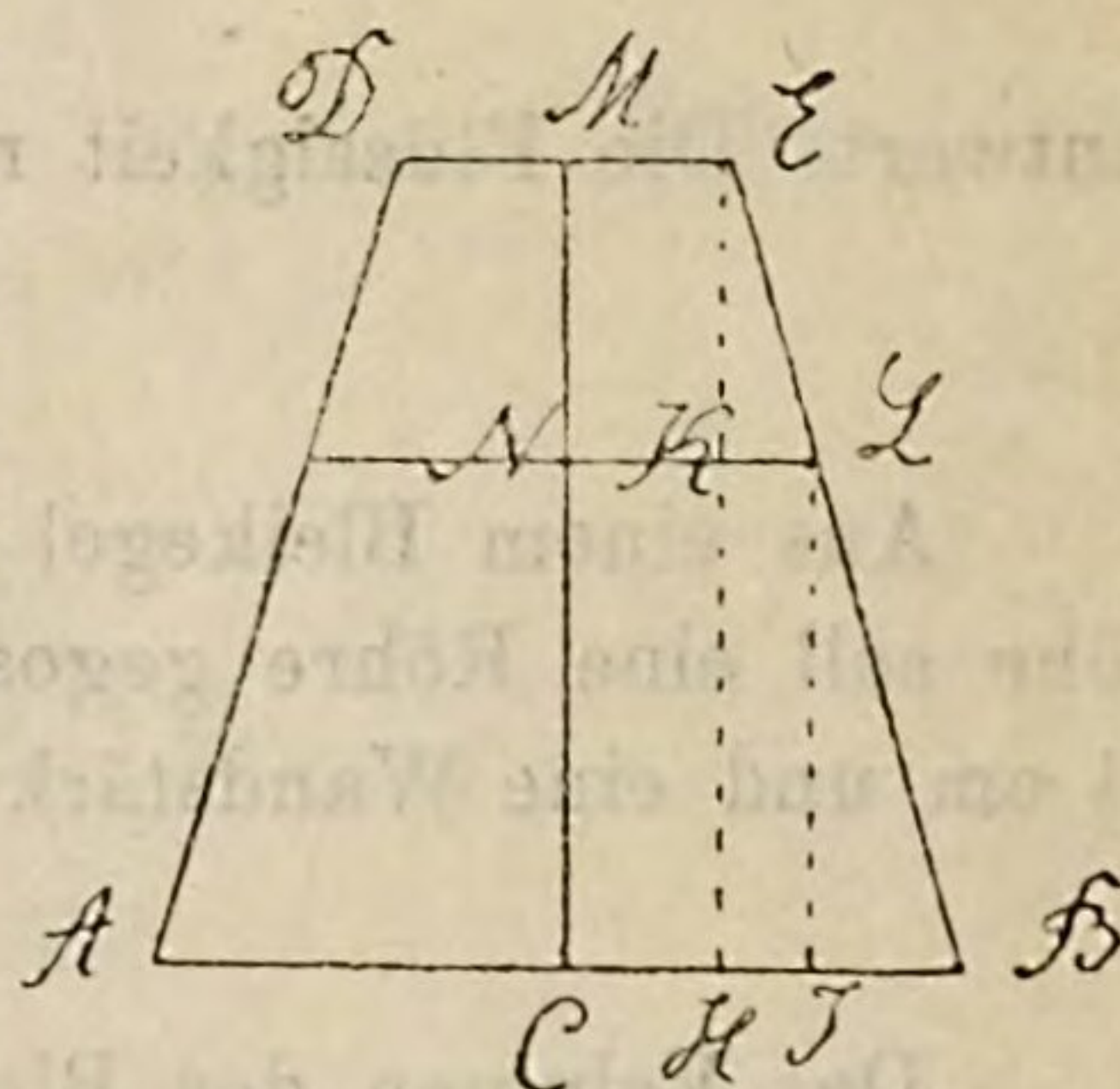


Fig. 48.

3. Niederbayern. 1892.

Ein cylindrisches, hohles, oben offenes Gefäß von $\frac{1}{4}$ m Höhe schließt ein Volumen von 75438,5 ccm ein und ist über das Gefäß hinaus kegelförmig mit Getreide gefüllt, so daß es im ganzen 84,49112 Liter faßt; wie groß ist die Höhe dieses Kegels?

Lösung.

I. Aus dem Volumen und der Höhe des cylindrischen Gefäßes (ABCD Fig. 49) wird die Grundfläche (F) berechnet. Diese ist zugleich die Grundfläche des Kegels.

II. Zieht man den Inhalt des Cylinders vom gesamten Inhalt ab, so bleibt der Inhalt des Kegels.

III. Vom Kegel kennt man nun die Grundfläche und den Inhalt, aus denen sich die Höhe (SM) bestimmen läßt.

Ausführung.

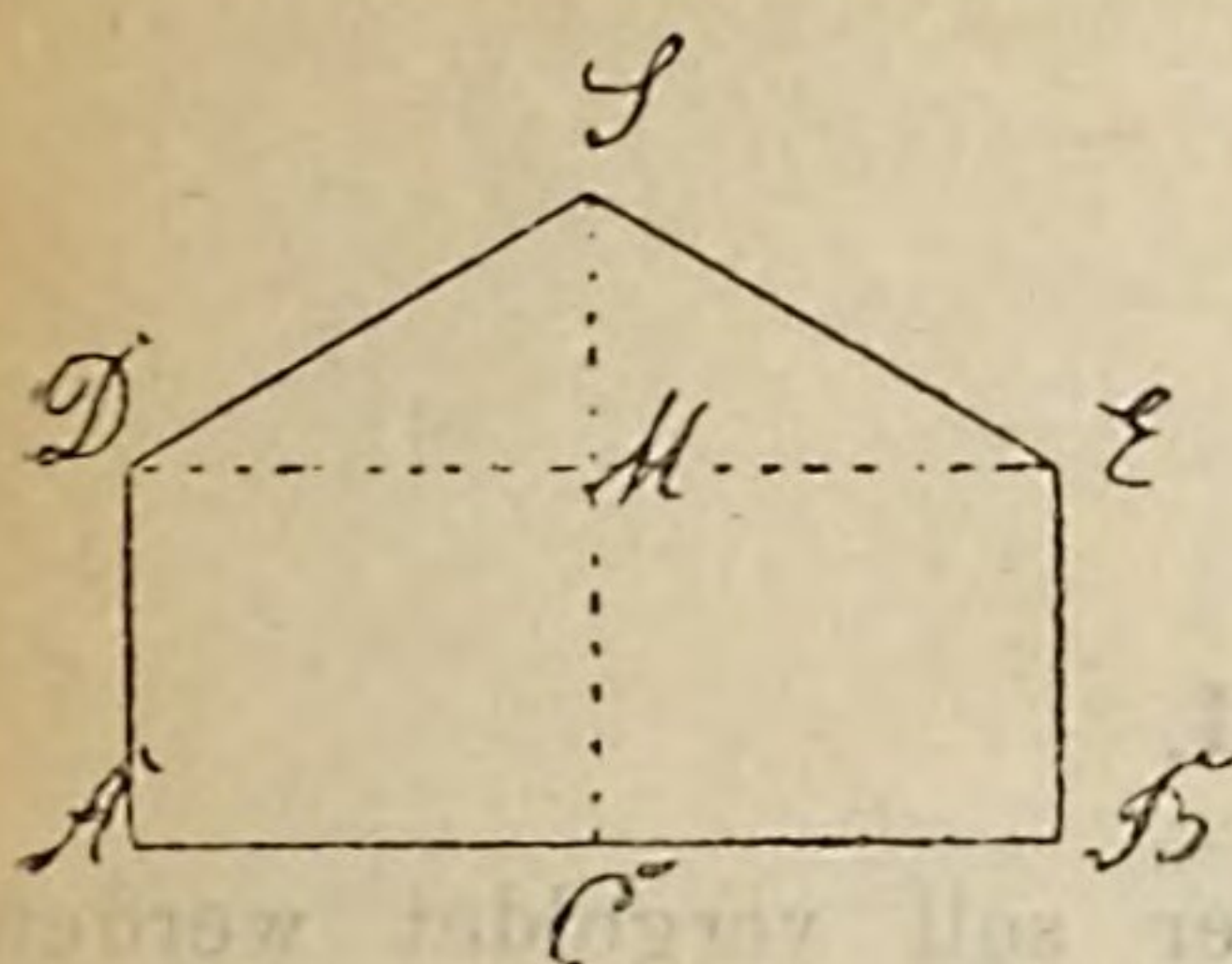


Fig. 49.

I. $F \times 2,5 = 75,438,5$

$F = 30,1754 \text{ qdm.}$

II. Der Inhalt des Kegels ist

$84,49112 - 75,4385 = 9,05262 \text{ cdm.}$

III. Die Höhe des Kegels ist

$SM = \frac{9,05262 \times 3}{30,1754} = 0,9 \text{ dm} = 9 \text{ cm.}$

Antwort: Die Höhe des Kegels beträgt 9 cm.

3. Niederbayern. 1887.

Ein Kegelstumpf wird in der Richtung der Achse cylindrisch ausgebohrt, so daß die Weite der Höhlung gleich ist dem Durchmesser der kleinen Grundfläche. Diese beträgt nun 2 qdm, die große Grundfläche ist 4mal so groß, der Stumpf 8 dm hoch. Welcher Kubikinhalt ist ihm geblieben?

Lösung.

I. Der Inhalt des Kegelstumpfes (Fig. 50) beträgt (V)

$V = \frac{8}{3} (8 + 4 + 2) = 37\frac{1}{3} \text{ cdm.}$

II. Die Menge des ausgebohrten Cylinders ist v

$v = 2 \times 8 = 16 \text{ cdm.}$

III. Die übrig bleibende Masse beträgt

$37\frac{1}{3} - 16 = 21\frac{1}{3} \text{ cdm.}$

Antwort: Die übrig bleibende Masse beträgt $21\frac{1}{3} \text{ cdm.}$

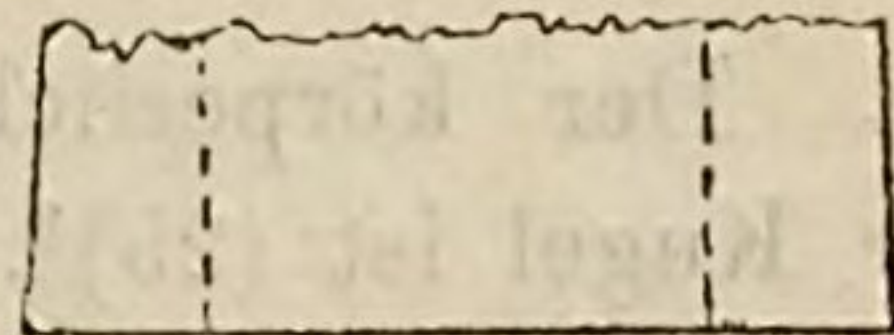
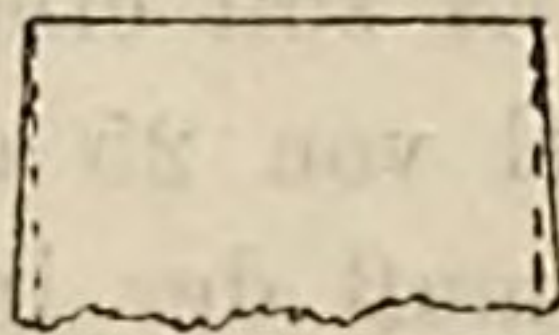


Fig. 50.

Kugel und vermischte Aufgaben (Hohlkugel, Kugelschnitte u. s. w.).

4. Schwaben. 1885.

Der Umfang (des größten Kreises) einer Kugel beträgt 113,09 cm. Wie groß ist die Oberfläche? ($\pi = 3,14$).

Lösung.

Aus dem gegebenen Umfange wird der Halbmesser (r) und mittelst dieses die Oberfläche (O) berechnet.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & 2r\pi = 113,09 \text{ cm.} \\ & r = \frac{113,09}{2\pi} = 18 \text{ cm.} \\ \text{II.} \quad & O = 4 \times 18 \times 18 \times 3,14 \\ & O = 4069,44 \text{ qcm.} \end{aligned}$$

3. Oberbayern. 1881.

Ein Turmknopf von 0,7 m Durchmesser soll vergoldet werden. Wie teuer kommt die Vergoldung, wenn 1 qm 140 M kostet? ($\pi = \frac{22}{7}$).

Lösung.

I. Die Kugeloberfläche (O) ist $4R^2\pi$, wobei $R = \frac{0,7}{2}$; somit ist

$$\begin{aligned} O &= 4 \times \frac{0,7 \times 0,7}{2 \times 2} \times \frac{22}{7} \\ O &= 0,1 \times 0,7 \times 22 = 1,54 \text{ qm.} \end{aligned}$$

II. Die Kosten (E) betragen: $E = 1,54 \times 140 = 215,60 \text{ M.}$

2. Oberbayern. 1894.

Es soll eine Kugel gegossen werden, welche mit einem hohlen Würfel von 25 cm Seitenlänge im lichten gleichen Hohlraum hat; wie groß muß der innere Durchmesser sein?

Lösung.

Der körperliche Inhalt des Würfels, somit auch der Hohlraum der Kugel ist $(25)^3$. Bezeichnet r den Radius des Hohlraumes so ist

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}r^3\pi &= (25)^3 \\ r^3 &= \frac{(25)^3 \times 6}{8\pi} = \\ r &= \sqrt[3]{1,911} \\ r &= \frac{25}{2} \times 1,240 = 15,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Antwort: Der innere Durchmesser ist $2 \times 15,5 = 31 \text{ cm.}$

3. Niederbayern. 1888.

In eine Kugel von 84,78 qcm Oberfläche ist ein Würfel eingeschrieben; wie groß ist der Kubikinhalte desselben?

L ö s u n g.

I. Der Durchmesser der Kugel ist die Diagonale des Würfels (Fig. 51). Nun ist, wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet,

$$4r^2\pi = 84,78$$

$$(2r)^2 = 27. \text{ Somit ist}$$

$$\overline{AC}^2 = 27$$

$$\text{II.} \quad \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 3 \overline{AG}^2$$

$$\text{III.} \quad 3 \overline{AG}^2 = 27$$

$$\overline{AG} = 3$$

IV. Der Inhalt (V) des Würfels ist $3^3 = 27 \text{ ccm.}$

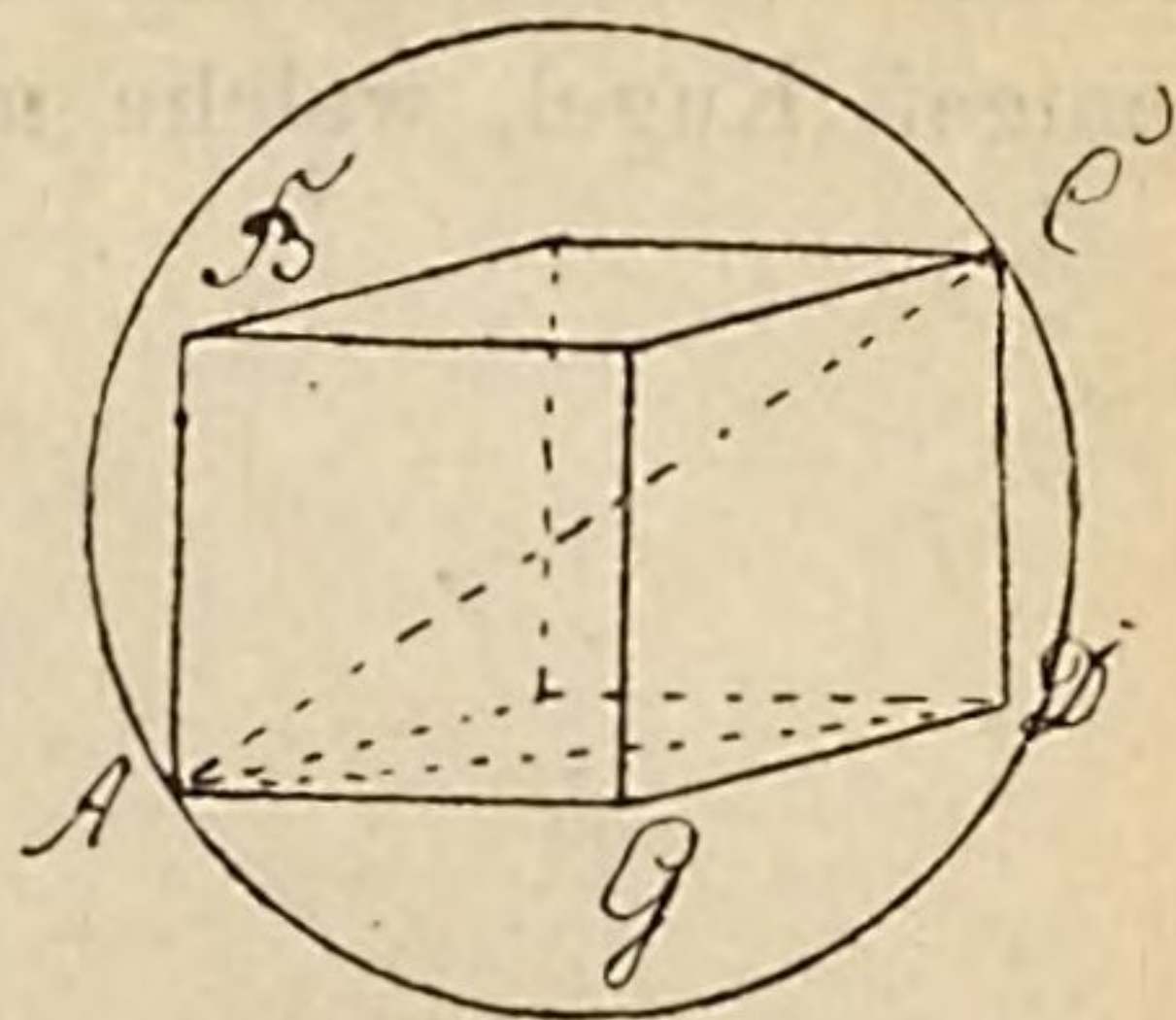


Fig. 51.

4. Oberpfalz. 1884.

Die Diagonale eines Würfels mißt 10 m. Wie groß ist der Inhalt der eingeschriebenen Kugel? ($\pi = 3,14$).

L ö s u n g.

Der Halbmesser der eingeschriebenen Kugel (r) ist so groß, wie die halbe Kante AG (Fig. 51). Diese Kante muß aus der gegebenen Diagonale AC gefunden werden. Nun ist $(AC)^2 = (CD)^2 + \overline{AD}^2$. Aber $(AD)^2 = (AG)^2 + (GD)^2$; daher $(AC)^2 = (CD)^2 + (AG)^2 + (GD)^2$. Nun sind CD , AG und GD als Würfelfanten einander gleich, darum ist

$$\text{I.} \quad (AC)^2 = 3 (AG)^2$$

$$AC = AG \sqrt{3}^*$$

$$\text{II.} \quad r = \frac{1}{2} AG$$

$$AG = 2r$$

$$\text{III.} \quad 2r \sqrt{3} = AC$$

$$r = \frac{10}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

IV. Der Inhalt der eingeschriebenen Kugel (gl) beträgt

$$gl = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \times \frac{125}{3\sqrt{3}} \times 3,14$$

$$gl = \frac{4}{3} \times \frac{125\sqrt{3}}{9} \times 3,14 = 100,714 \text{ cbm.}$$

Antwort: Die Kugel hält 100,714 cbm.

*) AC ist der Durchmesser der umschriebenen Kugel oder $2R$, und AG der eingeschriebenen Kugel oder $2r$. Aus I. folgt nun $R = r\sqrt{3}$ oder, wenn $AG = 2r$ mit k (Kante) bezeichnet wird, $R = \frac{k}{2}\sqrt{3}$.

3. Niederbayern. 1890.

Die Höhe eines Kegels ist um 1,25 cm, die Seite um 2,5 cm größer als der Radius der Grundfläche. Wie groß ist der Inhalt derjenigen Kugel, welche mit diesem Kegel gleiche Oberfläche hat?

Lösung.

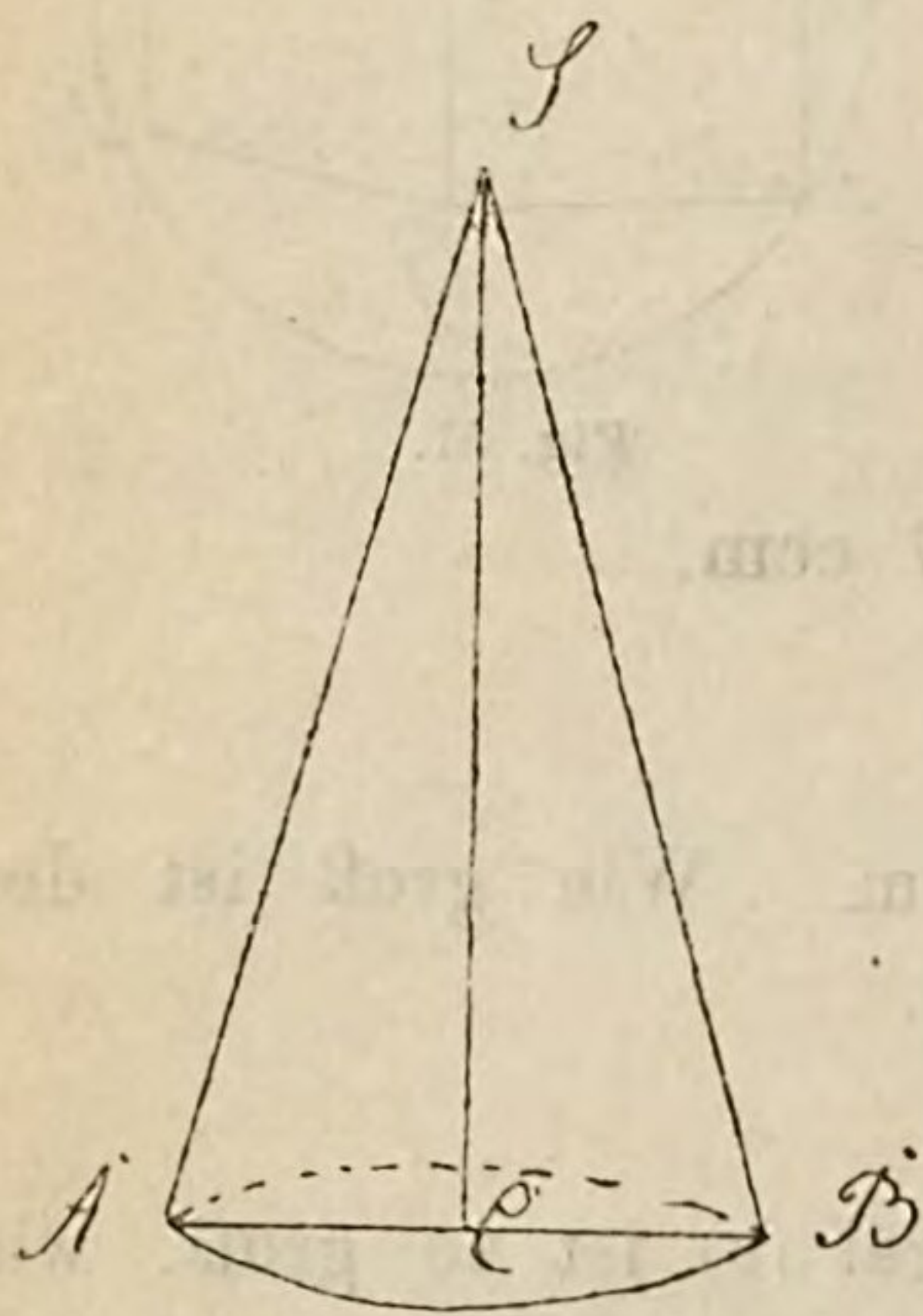


Fig. 52.

I. Wird der Radius der Grundfläche des Kegels (Fig. 52) $CB = x$ cm gesetzt, so ist die Höhe $SC = x + 1,25$ und die Seite $SB = x + 2,5$. Diese drei Linien bilden ein rechtwinkeliges Dreieck, weßhalb

$$x^2 = (x + 2,5)^2 - (x + 1,25)^2$$

$$x^2 = (2x + 3,75) \times 1,25$$

$$x^2 - 2,5x = 4,6875$$

$$\left(x - \frac{2,5}{2}\right)^2 = 6,25$$

$$x = \frac{2,5}{2} \pm 2,5$$

$$x_1 = 3,75 \text{ cm.}$$

II. Die Oberfläche des Kegels und somit auch der Kugel ist

$$O = (3,75)^2 \pi + 3,75 \pi \times 6,25 = 37,5 \pi.$$

III. Aus der Oberfläche der Kugel ($4 R^2 \pi$) wird der Radius der Kugel bestimmt

$$4 R^2 \pi = 37,5 \pi$$

$$R^2 = 9,375$$

$$R = 3,062 \text{ cm.}$$

IV. Der Inhalt der Kugel ist

$$\frac{4}{3} R^3 \pi = 4 R^2 \pi \times \frac{1}{3} R = 37,5 \times 3,14 \times 1,0206 = 120,176 \text{ ccm.}$$

Antwort: Der körperliche Inhalt der Kugel ist 120,176 ccm.

3. Unterfranken. 1883.

Von welchem Rauminhalte ist die Kugel, welche in einen Hohlcyylinder von 12 m Durchmesser und Höhe genau hineinpaßt? Wie verhält sich der Hohlraum des Cylinders zum Inhalte der Kugel? ($\pi = 3,14$).

Lösung.

A. I. Das Volumen der Kugel (v) ist

$$v = \frac{4}{3} \overline{MC}^3 \times \pi = \frac{4}{3} \times (6)^3 \times 3,14 = 904,32 \text{ cbm.}$$

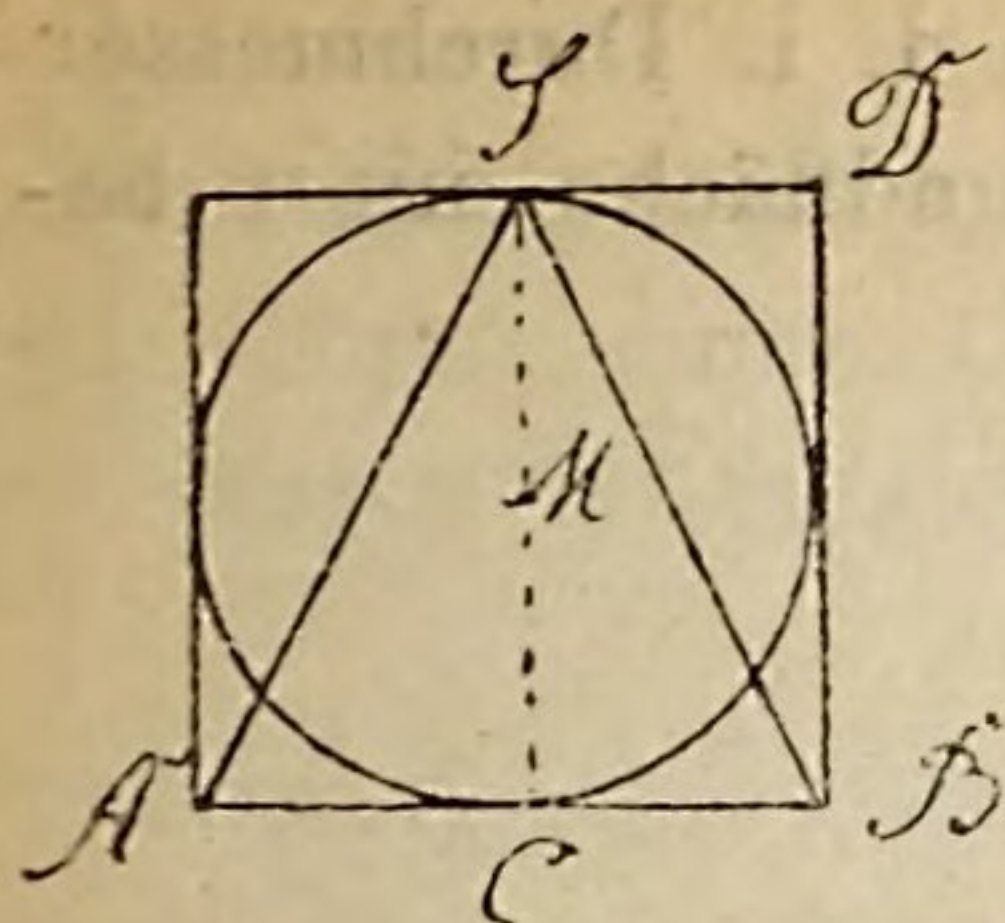


Fig. 53.

Das Volumen des Cylinders (V) ist

II. $V = 6^2 \times 3,14 \times 12 = 1356,48 \text{ cbm.}$

B. Der Hohlraum des Cylinders verhält sich zum Inhalt der Kugel wie $2 : \frac{4}{3} = 3 : 2$.

Antwort: Der Rauminhalt der Kugel beträgt **904,32 cbm.** Der Hohlraum des Cylinders verhält sich zum Inhalt der Kugel wie **3 : 2.**

4. Oberbayern. 1894.

Ein Cylinder, dessen Durchmesser zur Höhe in dem Verhältnisse **3 : 2** stand, hat durch Umgießen eine Kugel von 174 mm Durchmesser gegeben. Wie groß sind Durchmesser und Höhe des Cylinders gewesen?

Lösung.

I. Der Inhalt des Cylinders ist gleich demjenigen der Kugel, deren Halbmesser $R = \frac{174}{2} \text{ mm}$ beträgt. Dieser Inhalt ist $V = \frac{4}{3} \times (\frac{174}{2})^3 \pi = \frac{4}{3} \times (87)^3 \pi$.

II. Wird der Halbmesser des Cylinders mit $\frac{x}{2}$ bezeichnet, so ist die Höhe $\frac{2}{3}x$. Der Ausdruck für den Kubikinhalt des Cylinders ist nun $V = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi \times \frac{2}{3}x$. Somit ist

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi \times \frac{2}{3}x = \frac{4}{3} (87)^3 \pi$$

$$\frac{x^3}{2} = 4 \times (87)^3$$

$$x^3 = 8 \times (87)^3$$

$$x = 2 \times 87 = 174 \text{ mm.}$$

Antwort: Der Durchmesser des Cylinders ist **174 mm**, die Höhe **116 mm** groß.

3. Niederbayern. 1891.

In einer Kirchenmauer befindet sich eine Nische; ihre Grundfläche hat die Form eines Halbkreises mit 3,084 m Umfang; 2,3 m über der Grundfläche wölbt sie sich zu einer Viertelshohlkugel; welchen Kubikinhalt hat die Nische?

Lösung.

Der Inhalt der Nische besteht aus einem halben Cylinder und einem Viertel einer Kugel. Die Radien dieser Körper sind direkt

nicht angeben, sondern der Umfang der Grundfläche d. i. Durchmesser und ihr halber Kreisumfang. Wird der Radius der Grundfläche mit r bezeichnet, so ist

$$2r + r\pi = 3,084$$

$$r = \frac{3,084}{2 + 3,14} = \frac{3,084}{5,14} = 0,6 \text{ m.}$$

Der Inhalt (V) der Nische ist nun

$$V = \frac{(0,6)^2 \pi \times 2,3}{2} + \frac{(0,6)^3 \pi}{3}$$

$$V = (0,6)^2 \pi [1,15 + 0,2]$$

$$V = 1,52604 \text{ cbm.}$$

Antwort: Der Inhalt der Nische ist 1,52604 cbm.

3. Niederbayern. 1893.

Um wie viel differiert der Inhalt eines 10 m hohen gleichseitigen Kegels mit der in demselben eingeschriebenen Kugel?

Lösung.

Legt man durch die Achse des Kegels (Fig. 54) eine Ebene, so bilden die Schnitte durch die Oberflächen beider Körper einen in das reguläre Dreieck eingeschriebenen Kreis, dessen Radius mit r bezeichnet sein möge.

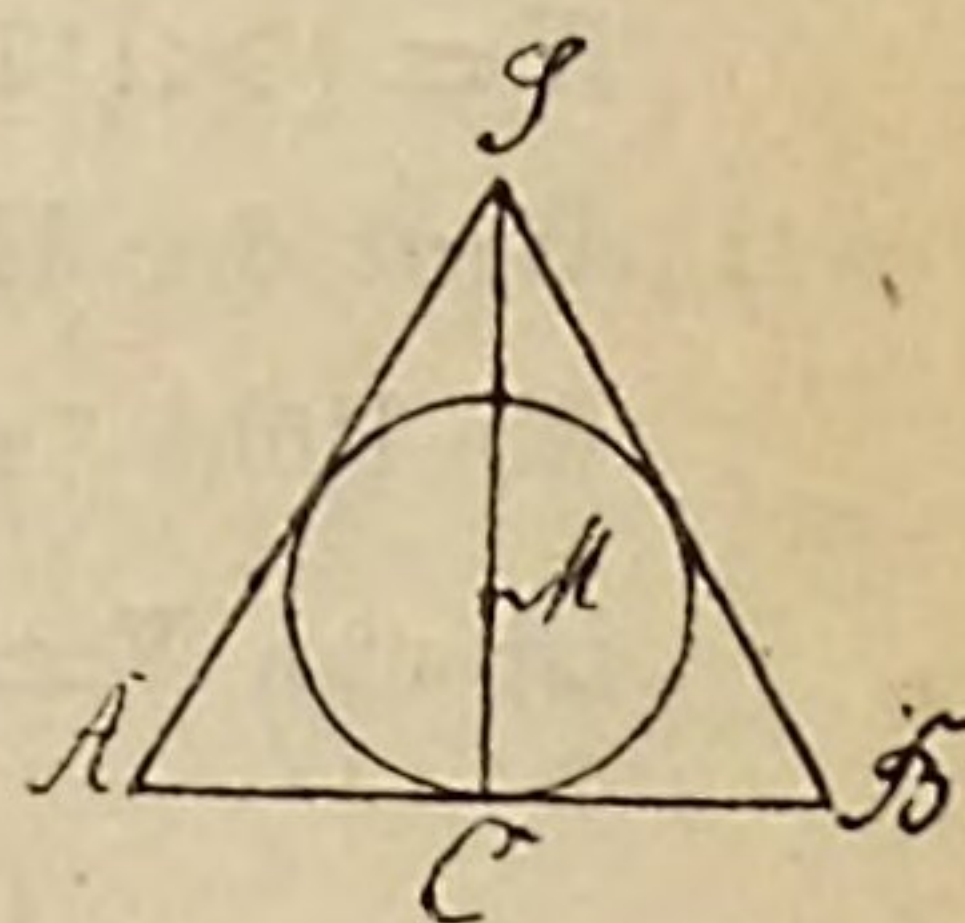


Fig. 54.

A. I. $r = \frac{h}{3} = \frac{10}{3}$

II. Der Inhalt der Kugel (i) ist

$$i = \frac{4}{3} \times \left(\frac{10}{3}\right)^3 \times 3,141 = \frac{4000}{9} \times 0,349$$

$$i = \frac{1396}{9} = 155,111 \text{ cbm.}$$

B. I. $BS = 2 BC = 2 R$

II. $2 R^2 - R^2 = h^2$

$$3 R^2 = 100$$

$$R = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10}{3} \sqrt{3}$$

III. Der Inhalt des Kegels (J) ist

$$J = \frac{R^2 \pi h}{3} = \frac{100}{3} \times \frac{3,141 \times 10}{3}$$

$$J = 1000 \times 0,349 = 349 \text{ cbm.}$$

C. Der Unterschied des Inhaltes der beiden Körper (D) beträgt

$$D = 349 - 155,1111 = 193,8889 \text{ cbm.}$$

Antwort: Der Inhalt des Kegels ist um 193,8889 cbm größer als der Rauminhalt der Kugel.

3. Niederbayern. 1895.

Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Kegels, welcher mit einer Kugel, deren Oberfläche 314 qm beträgt, gleiches Volumen hat, und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist?

Lösung.

- I. Da die Oberfläche gegeben ist, so kann man den Radius der Kugel (R) berechnen.
- II. Ist R gefunden, so wird der Rauminhalt (V) bestimmt.
- III. Da der Kegel dasselbe Volumen hat, und da seine Höhe gegeben ist, so kann man die Fläche des Grundkreises (f) finden.
- IV. Zum Grundkreis wird der Halbmesser (r) berechnet.
- V. Hierauf wird die Seitenlänge (s) des Kegels gesucht.
- VI. Endlich wird der Mantel berechnet und dessen Fläche zum Inhalt des Grundkreises addiert.

Ausführung.

- I. $4 R^2 \pi = 314$
 $R^2 = \frac{314}{3,14 \times 4} = 25$
 $R = 5 \text{ m.}$
- II. $V = \frac{4}{3} (5)^3 \pi = (4 \times 25 \times \pi) \times \frac{5}{3} = 314 \times \frac{5}{3} = \frac{1570}{3} \text{ cbm.}$
- III. $\frac{10 \cdot f}{3} = \frac{1570}{3}$
 $f = 157 \text{ qm.}$
- IV. $r^2 \pi = f = 157$
 $r^2 = \frac{157}{3,14} = 50$
 $r = \sqrt{50} = 5 \sqrt{2}$
- V. $s = \sqrt{100 + r^2} = \sqrt{150} = \sqrt{6 \times 25} = 5 \sqrt{6}$
- VI. Die Oberfläche des Kegels (O) ist
 $O = 157 + r \pi s = 157 + 3,14 \times 5 \sqrt{2} \times 5 \sqrt{6}$
 $O = 157 + 15,7 \times 5 \sqrt{12} = 157 + 15,7 \times 10 \sqrt{3}$
 $O = 157 + 157 \times 1,732 = 157 \times 2,732 = 428,924 \text{ qm.}$

Antwort: Die Oberfläche des Kegels ist 428,924 qm.

3. Oberpfalz. 1885.

In einen Cylinder, dessen Höhe so groß ist, wie der Durchmesser der Grundfläche, werden eine Kugel und ein Kegel eingeschrieben. Wie groß ist der Unterschied ihrer Inhalte, wenn die Höhe des Cylinders $BD = 2r = 3 \text{ m}$ beträgt?

Lösung.*)

I. Der Inhalt des Cylinders (Fig. 53) ist

$$r^2 \pi \times 2r = 2r^3 \pi = 2 \times 2^3 \times 3,14 = 21,195 \text{ cbm.}$$

II. Der Inhalt der Kugel ist

$$\frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \times 2^3 \times 3,14 = 14,130 \text{ cbm.}$$

III. Der Inhalt des Kegels ist

$$\frac{r^2 \pi \times 2r}{5} = \frac{2r^3 \pi}{3} = \frac{21,195}{3} = 7,065 \text{ cbm.}$$

IV. Der Cylinder ist um 7,065 cbm größer als die Kugel und diese um 7,065 cbm größer als der Kegel.

Antwort: Der Inhalt des Cylinders, der Kugel und des Kegels verhalten sich zu einander wie 3 : 2 : 1 oder der Cylinder ist um so viele Einheiten größer, als die Kugel, um welche diese wieder größer ist als der Kegel, nämlich um 7,065 cbm.

2. Oberfranken. 1890.

Einem Kegel, dessen Seitenlinie gleich dem Durchmesser ist, wird eine Kugel so eingeschrieben, daß sie die Basis und die Mantelfläche berührt. Der Kugel wird ein Cylinder einbeschrieben, bei dem Höhe und Durchmesser gleich sind. Wenn nun der Mantel des Kegels 117,7431 qcm trägt, welchen Inhalt haben dann die drei Körper?

Lösung.

A. I. Da der Flächeninhalt des Kegelmantels gegeben ist, so muß zunächst der Radius ($AC = R$) des Kegels gesucht werden. Nun ist

$$R \pi \cdot SB = 117,7431$$

$$R \pi \times 2R = 117,7431$$

$$R^2 = 18,749$$

$$R = 4,33 \text{ cm.}$$

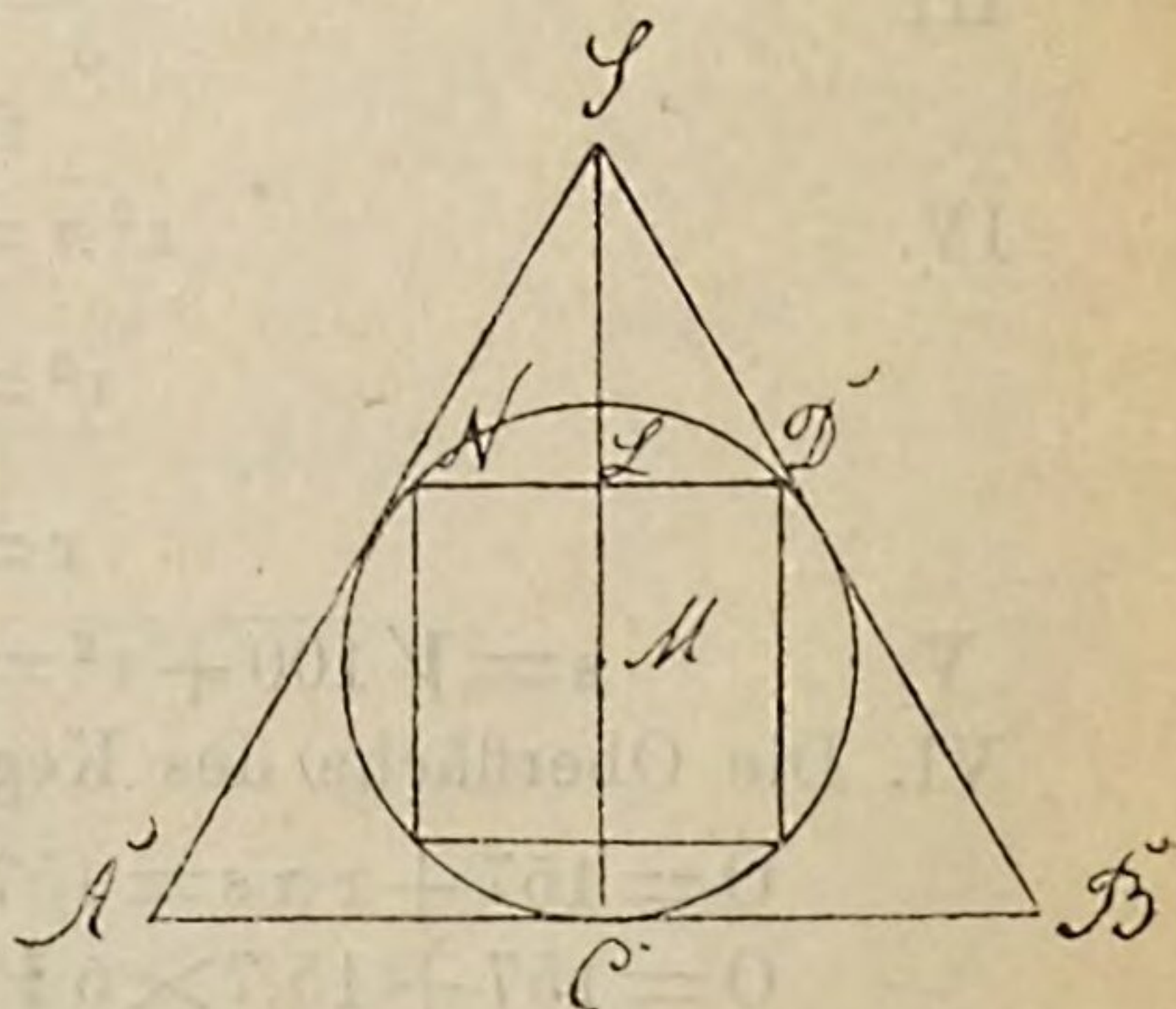


Fig. 55.

*) Allgemein ist der Inhalt des Cylinder $= r^2 \pi \times 2r = 2r^3 \pi$

" der Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi$

" des Kegels $= \frac{r^2 \pi \times 2r}{3} = \frac{2r^3 \pi}{3}$

Die Inhalte verhalten sich daher wie $2r^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{2r^3 \pi}{3} = 3 : 2 : 1$.

II. Der Inhalt des Kegels (V) ist

$$V = \frac{R^2 \pi \times SC}{3} = \frac{R^2 \pi \times \sqrt{(AS)^2 - (AC)^2}}{3} = \frac{R^2 \pi \sqrt{4R^2 - R^2}}{3} \\ = \frac{R^2 \pi \times R \sqrt{3}}{3}$$

$$V = \frac{18,749 \times 4,33 \times 1,732 \times 3,14}{3}$$

$$V = \frac{18,749 \times 7,5 \times 3,14}{3} = 147,17965 \text{ ccm.}$$

B. I. Der Radius der Kugel ($MD=r$) ist $\frac{1}{3} SC = \frac{1}{3} R \sqrt{3} = 2,5 \text{ cm.}$

II. Der Inhalt der Kugel (K) ist $K = \frac{4}{3} (2,5)^3 \pi = 65,417 \text{ ccm.}$

C. I. Der Radius (NL) des einbeschriebenen Cylinders wird gefunden aus

$$\overline{NL}^2 + \overline{ML}^2 = \overline{MN}^2$$

$$2 \overline{NL}^2 = \overline{MN}^2 = \overline{MD}^2$$

$$\overline{NL} = \frac{1}{2} \overline{MN} \sqrt{2} = \frac{1}{2} r \times 1,414 = 2,5 \times 0,707$$

II. Der Inhalt des Cylinders (v) ist

$$v = \overline{NL}^2 \pi \times 2 \overline{LM}$$

$$v = \frac{\overline{MN}^2}{2} \pi \times 2 \overline{NL}$$

$$v = (2,5)^2 \pi \times 2,5 \times 0,707 = 34,687 \text{ ccm.}$$

Antwort: Der Inhalt des Kegels beträgt 147,17965 ccm, der Kugel 65,417 ccm und des Cylinders 34,687 ccm.

2. Unterfranken. 1881.

Jede der beiden Säulen eines Hofthores bildet einen Cylinder, welcher in einen Kegel übergeht, auf dessen Spitze eine Kugel ruht. Die Seitenfläche des Kegels stößt mit der Seitenfläche des Cylinders unter einem Winkel von 45° zusammen. Der Cylinder hat einen Durchmesser von 0,50 m, die Höhe der ganzen Säule, einschließlich der Kugel, ist 3 m, der Durchmesser der letzteren 30 cm. a) Welcher Flächeninhalt ist zu berechnen, wenn beide Säulen angestrichen werden? b) Wie viel beträgt der Abfall an Masse bei Herstellung der Kugeln aus würfelförmigen Quadern, deren Kanten dem Kugeldurchmesser gleich sind? ($\pi=3,14$).

Lösung.

A. I. $\triangle EDG$ (Fig. 56) ist gleichschenkelig, daher $GD=ED=25 \text{ cm}$

und $EG = \sqrt{(25)^2 + (25)^2} = 25 \sqrt{2} = 35,35 \text{ cm.}$

II. $CH=300 \text{ cm}$ daher $CD=300-25-30=245 \text{ cm.}$

III. Die Fläche des Cylinders ist $2 r \pi h = 50 \times 3,14 \times 245 = 38465$ qcm.

IV. Die Fläche des Kegelmantels ist $\frac{2 r \pi \cdot EG}{2} = 25 \times 3,14 \times 35,35 = 2774,975$ qcm.

V. Die Oberfläche der Kugel beträgt $4 r^2 \pi = 4 \times (15)^2 \times 3,14 = 2826$.

VI. Die Oberflächen der beiden Säulen, welche zu berechnen sind, messen

$$2 \times (38465 + 2774,975 + 2826) = 88131,95 \text{ qcm} \text{ oder } 8,8132 \text{ qm.}$$

B. I. Der körperliche Inhalt eines Würfels mit der Seitenkante von 30 cm beträgt $(30)^3 = 27000$ ccm.

II. Das Volumen der Kugel, dessen Halbmesser 15 cm beträgt, ist $\frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \times (15)^3 \times 3,14 = 14130$ ccm.

III. Der Abfall für zwei Kugeln beträgt

$$2 \times (27000 - 14130) = 25740 \text{ ccm} = 0,025740 \text{ cbm.}$$

Antwort: a) Der zu berechnende Flächeninhalt beträgt 8,8132 qm;
b) der Abfall der Masse bei der Herstellung der beiden Kugeln beträgt 0,025740 cbm.

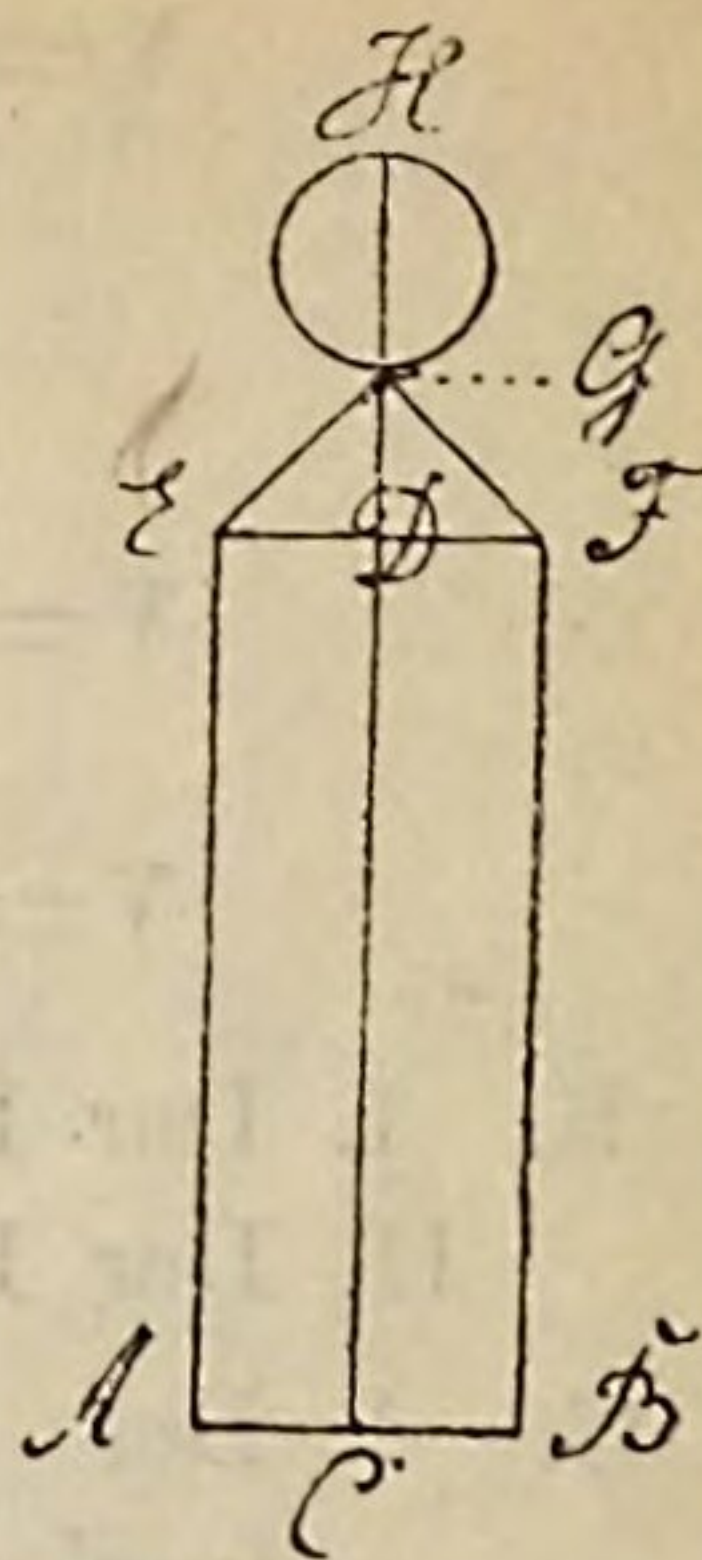


Fig. 56.

3. Niederbayern. 1889.

Ein Stadtthor ist mit 2 Pfeilern geziert; jeder hat die Form eines Cylinders mit $7\frac{1}{2}$ dm Durchmesser, geht dann unter einem Winkel von 45° in einen Kegel über und trägt auf der Spitze eine Kugel mit $22\frac{1}{2}$ cm großem Radius. Auf diese Weise hat jeder Pfeiler einschließlich seiner Kugel eine Höhe von $4\frac{1}{2}$ m. Es fragt sich nun, welcher Flächeninhalt in Betracht kommt, da die beiden Pfeiler angestrichen werden sollen.

Lösung.

Jeder der beiden Pfeiler (Fig. 56) besteht aus einem Cylinder, einem Kegel und einer Kugel

A. I. Der Halbmesser des Cylinders ist $\frac{1}{4}$ dm. Die Höhe desselben ist $CH - DG - GH = 45 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 45 - 8,25 = 36,75$ dm.

II. Der Cylindermantel ist

$$2 \times \frac{1}{4} \times 3,14 \times 36,75.$$

B. Der Kegelmantel ist $\frac{1}{4} \times 3,14 \times GF = \frac{1}{4} \times 3,14 \times \frac{1}{4} \sqrt{2}$.

C. Die Oberfläche der Kugel ist $4 \times (2,25)^2 \times 3,14$.

D. Die ganze Oberfläche der beiden Pfeiler beträgt

$$O = 2 \times \left[\frac{1}{2} \times 3,14 \times 36,75 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \times 3,14 \times 1,414 + (4,5)^2 \times 3,14 \right]$$

$$O = \frac{3,14}{2} (30 \times 36,75 + 15 \times 15 \times 0,3535 + 9 \times 9)$$

$$O = 1,57 (1102,5 + 79,5375 + 81)$$

$$O = 1982,968875 \text{ qdm} = 19 \text{ qm } 83 \text{ qdm.}$$

Antwort: Die anzustreichende Fläche beträgt 19 qm und 83 qdm.

5. Schwaben. 1887.

Die Summe der Oberflächen zweier Kugeln beträgt 78,50 qm. Die Radien derselben differieren um 0,5 m. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt einer jeden?

Lösung.

I. Wird der Radius der größeren Kugel mit R, der kleineren mit r bezeichnet, so ist

$$\text{I. } 4R^2\pi + 4r^2\pi = 78,5$$

$$\text{II. } R = r + 0,5$$

$$\begin{array}{rcl} \text{I.} & R^2 + r^2 & = 6,25 \\ \text{III} = \text{II} \times \text{II} & R^2 = r^2 + r + 0,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{IV.} & r^2 + r + 0,25 + r^2 & = 6,25 \\ & 2r^2 + r + 0,25 & = 6,25 \\ & r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{16} & = 3 + \frac{1}{16} \\ & r + \frac{1}{4} & = \pm \frac{7}{4} \\ & r_1 & = 1,5 \text{ m} \\ & R & = 2 \text{ m.} \end{array}$$

A. Die Oberfläche der größeren Kugel ist $4 \times 2^2 \times 3,14 = 50,24 \text{ qm}$, der kleineren $78,50 - 50,24 = 28,26 \text{ qm}$.

B. Der Inhalt der größeren Kugel ist

$$\frac{4}{3} \times 2^3 \times 3,14 = 4 \times 2^2 \times 3,14 \times \frac{2}{3} = 50,24 \times \frac{2}{3} = 33,493 \text{ cbm.}$$

Der Inhalt der kleineren Kugel ist

$$\frac{4}{3} \times (1,5)^3 \times 3,14 = 28,26 \times \frac{1,5}{3} = 14,130 \text{ cbm.}$$

2. Oberpfalz. 1883.

Eine hölzerne Kugel von 10 cm Durchmesser soll durch Abdrehen $\frac{1}{10}$ ihres Gewichtes verlieren. Um wie viel verringert sich der Durchmesser, wenn das spezifische Gewicht*) des Holzes = 0,9 beträgt?

*) Die Angabe des spezifischen Gewichtes ist überflüssig.

Lösung.

Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Radien oder Durchmesser. Wird die Kugel so abgedreht, daß sie $\frac{1}{10}$ ihres Gewichtes, somit auch ihres Volumens verliert, so verhalten sich die Inhalte auch wie 10:9; daher

$$10:9 = (10)^3:x^3$$

$$x = 10\sqrt[3]{0,9} = 9,6549 \text{ cm.}$$

Antwort: Der Durchmesser verringert sich um $10 - 9,6549 = 0,3451 \text{ cm.}$

5. Oberpfalz. 1893.

Die Summe der Kubikinhalte zweier Kugeln beträgt 1,172 cbm, die ihrer Radien 1 m. Wie groß sind die Durchmesser dieser Kugeln? (Nur bis zur zweiten Dezimale!)

Lösung.

Wenn R und r die beiden Radien bezeichnen, so ist

$$\text{I.} \quad R + r = 1$$

$$\text{II.} \quad \frac{4}{3} R^3 \pi + \frac{4}{3} r^3 \pi = 1,172$$

$$\text{I.} \quad r = 1 - R$$

$$\text{III.} \quad r^3 = (1 - R)^3 = 1 - 3R + 3R^2 - R^3$$

$$\text{IV. (aus II.)} \quad (R^3 + r^3) \frac{4 \times 3,14}{3} = 1,172$$

$$\text{V} = \text{IV} : \frac{4 \times 3,14}{3} \quad R^3 + r^3 = \frac{1,172 \times 3}{4 \times 3,14} = \frac{0,879}{3,140} = 0,28$$

$$\text{VI. (Subst.)} \quad R^3 + 1 - 3R + 3R^2 - R^3 = 0,28$$

$$3R^2 - 3R = 0,28 - 1$$

$$R^2 - R = -0,24$$

$$R^2 - R + \frac{1}{4} = 0,25 - 0,24$$

$$R - \frac{1}{2} = \pm 0,1$$

$$R = 0,5 \pm 0,1$$

$$R = 0,6$$

$$r = 0,4.$$

Antwort: Die Radien sind 0,6 m und 0,4 m.

4. Oberpfalz. 1895.

Die Differenz der Radien zweier Kugeln ist 3 cm, die Differenz der Inhalte dieser Kugeln ist 2147,76 ccm. Wie groß ist jeder Radius?

Lösung.

Werden die zu suchenden Radien mit R und r bezeichnet, so ist

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & R - r = 3 \\
 \text{II.} & \frac{4}{3} R^3 \pi - \frac{4}{3} r^3 \pi = 2147,76 \\
 \text{III.} & R = (3 + r) \\
 \text{IV} = \text{II} : \frac{4}{3} \pi & R^3 - r^3 = \frac{2147,76 \times 3}{4 \times 3,14} = 171 \times 3 \\
 \text{V. (Substit.)} & 27 + 27r + 9r^2 + r^3 - r^3 = 171 \times 3 \\
 & 9r^2 + 27r = 171 \times 3 - 27 = 162 \times 3 \\
 & r^2 + 3r = 18 \times 3 \\
 & r^2 + 3r + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{18 \times 3 \times 4 + 9}{4} = \frac{9 \times 25}{4} \\
 & r + \frac{3}{2} = \pm \frac{15}{2} \\
 & r_1 = 6 \text{ cm.} \\
 & R = 9 \text{ cm.}
 \end{array}$$

Antwort: Die beiden Radien sind 9 cm und 6 cm.

2. Oberpfalz. 1886.

Aus einer Kugel von 500 ccm sollen 200 ccm konzentrisch herausgenommen werden. Wie stark bleibt die Schale?

Lösung.

Die Dicke der Schale (D) ist so groß, wie der Unterschied zwischen dem äußeren Halbmesser (R) und dem inneren (r).

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & \frac{4}{3} R^3 \pi = 500 \\
 & R^3 = \frac{1500}{12,56} = \frac{15000}{125,6} \\
 & R = \frac{10 \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{125,6}} \\
 \text{II.} & \frac{4}{3} r^3 \pi = 200 \\
 & r^3 = \frac{600}{12,56} = \frac{6000}{125,6} \\
 & r = \frac{10 \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{125,6}} \\
 \text{III.} & D = \frac{10 \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{125,6}} - \frac{10 \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{125,6}} = \frac{10 (\sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{6})}{\sqrt[3]{125,6}} \\
 & D = \frac{10 (2,4662 - 1,8171)}{5,008} = \frac{6,491}{5,008} \\
 & D = 1,296 \text{ cm.}
 \end{array}$$

5. Schwaben. 1891.

Eine hohle Kugel von 204,1 cm äußerem Umfang und 0,5 cm Wandstärke wird mit Wasser gefüllt. Wie viele Liter braucht man?

Lösung.

- I. Da der Umfang 204,1 cm beträgt, so ist der Radius bis zur äußeren Oberfläche $R = \frac{204,1}{2 \times 3,14} = 32,5$ cm.
- II. Der Radius bis zur inneren Oberfläche ist $32,5 - 0,5 = 32$ cm $= 3,2$ dm.
- III. Das Volumen (v) des Hohlraumes ist $\frac{4}{3} \times (3,2)^3 \times 3,14 = 137,188693$ Liter.

1. Oberpfalz. 1894.

Wieviele Kubikmeter Mauerwerk enthält ein halbkugelförmiges, auf ebener Grundfläche ruhendes Gewölbe, das innen 3 m Höhe und 6 m Durchmesser hat, wenn die Wandstärke, radial gemessen, 0,42 m beträgt?

Lösung.

Der äußere Radius $R = 3,42$, der innere Radius $r = 3$. Das Volumen der Halbkugeln beträgt

$$\frac{2}{3} R^3 \pi = \frac{2}{3} \times (3,42)^3 \pi \text{ und } \frac{2}{3} r^3 \pi = \frac{2}{3} 3^3 \pi.$$

Das Volumen des Mauerwerkes (M) ist

$$M = \frac{2}{3} R^3 \pi - \frac{2}{3} r^3 \pi$$

$$M = \frac{2}{3} \pi [(3,42)^3 - 3^3]$$

$$M = \frac{2}{3} \times 3,14 (40 - 27) = \frac{2}{3} \times 3,14 \times 13 = 27,213 \text{ cbm.}$$

Antwort: Das Gewölbe enthält 27,213 cbm.

3. Oberpfalz. 1882.

Ein halbkugelförmiges Gewölbe hat einen inneren Durchmesser von 9,5 m und eine Mauerdicke von 0,5 m. Wie viel Kubikmeter hat das Mauerwerk? Wie teuer kommt der innere Verwurf, wenn das Quadratmeter mit 0,5 $\mathcal{M}$ berechnet wird? ($\pi = 3,14$).

Lösung.

a) Bezeichnet R den Radius bis zur äußeren Oberfläche und r den Radius bis zur inneren Oberfläche, so ist die Masse der halben Hohlkugel $V = \frac{2}{3} R^3 \pi - \frac{2}{3} r^3 \pi = \frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3)$.

Da $R = 9,5 + 0,5 = 10$ m und $r = 9,5$ m beträgt, so ist

$$V = \frac{2}{3} \times 3,14 [1000 - (9,5)^3] =$$

$$V = 298,561667 \text{ cbm.}$$

b) Die innere Oberfläche des Gewölbes (O) hat Quadratmeter

$$O = 2r^2\pi = 2 \times 9,5 \times 9,5 \times 3,14 = 566,77 \text{ qm.}$$

Die Kosten des inneren Verwurfes (P) betragen

$$P = 566,77 \times 0,5 = 283,39 \text{ M.}$$

Antwort: a) Das Volumen des Gewölbes ist **289,561667 cbm.** b) Die Kosten des inneren Verwurfes sind **283,39 M.**

4. Oberbayern. 1890.

Die äußere Oberfläche eines halbkugelförmigen Gewölbes ist 401,92 qm groß, die innere dagegen 353,25 qm. Wie dick ist die Steinlage?

Lösung.

I. Bezeichnet R den Radius bis zur äußeren Oberfläche, so ist

$$2R^2\pi = 401,92, \text{ somit } R = \sqrt{\frac{401,92}{6,28}} = 8 \text{ m.}$$

II. Bezeichnet r den Radius bis zur inneren Oberfläche, so ist

$$2r^2\pi = 353,25, \text{ somit } r = \sqrt{\frac{353,25}{6,28}} = 7,5 \text{ m.}$$

III. Die Dicke der Steinlage ist

$$R - r = 8 - 7,5 = 0,50 \text{ m} = 50 \text{ cm.}$$

4. Oberpfalz. 1891.

Wie groß muß der Halbmesser einer Kugel sein, damit sie dieselbe Oberfläche erhält, wie zwei andere Kugeln zusammen, von denen die eine einen Halbmesser von 4,5 m und die andere einen größten Umfang von 15,7 m hat?

Lösung.

A. Die Oberfläche der einen Kugel ist $4 \times (4,5)^2 \pi = 81 \times 3,14 \text{ qm.}$

B. I. Wird der Radius der zweiten der beiden kleineren Kugeln mit r bezeichnet, so ist $2r\pi = 15,7$ folglich $r = \frac{15,70}{6,28} = 2,5 \text{ m.}$

II. Die Oberfläche dieser Kugel ist $4 \times (2,5)^2 \pi = 25 \times 3,14 \text{ qm.}$

C. Wenn man den Radius der größten Kugel mit R m bezeichnet, so ist

$$4R^2\pi = 81 \times \pi + 25 \pi$$

$$R^2 = \frac{106}{4}$$

$$R = \sqrt{26,50} = 5,147 \text{ m.}$$

Antwort: Der Radius der größten Kugel muß **5,147 m** haben.

5. Oberpfalz. 1881.

Zu zwei Kugeln von 8 cm und 10 cm Durchmesser soll eine Dritte gesucht werden, welche so groß ist, als beide zusammen. Welcher Durchmesser ist ihr zu geben?

Lösung.

Der zu suchende Halbmesser sei R, dann ist

$$\frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{4}{3} \times 8^3 \times \pi + \frac{4}{3} \times (10)^3 \times \pi$$

$$R^3 = 8^3 + (10)^3$$

$$R^3 = 1512$$

$$R = \sqrt[3]{1512} = 11,478 \text{ cm.}$$

Antwort: Der gesuchte Durchmesser beträgt 11,478 cm.

5. Oberbayern. 1893.

Eine metallene Hohlkugel hat einen äußeren Durchmesser von 20 cm und die Wandstärke beträgt 9 cm. Wie groß würde die Wandstärke sein, wenn aus der Masse dieser Hohlkugel eine andere Hohlkugel mit dem Radius 12 cm gegossen würde?

Lösung.

Diese Aufgabe muß in zweierlei Weise gelöst werden, je nachdem 12 cm der innere oder der äußere Radius der zweiten Kugel ist.

A. Ist 12 cm der innere Radius, der äußere Radius dagegen x cm, so ist

$$\frac{4}{3} \times (10)^3 \times \pi - \frac{4}{3} \times 1^3 \times \pi = \frac{4}{3} \times x^3 \pi - \frac{4}{3} (12)^3 \pi$$

$$1000 - 1 = x^3 - 1728$$

$$2727 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{2727} = 13,97103 \text{ cm.}$$

Die Wandstärke ist in diesem Falle $13,97103 - 12 = 1,97103 \text{ cm.}$

B. Ist 12 cm der äußere Radius, der innere dagegen y cm, so ist

$$\frac{4}{3} \times (10)^3 \times \pi - \frac{4}{3} \times 1^3 \times \pi = \frac{4}{3} (12)^3 \pi - \frac{4}{3} y^3 \pi$$

$$1000 - 1 = 1728 - y^3$$

$$y^3 = 729$$

$$y = 9 \text{ cm.}$$

Die Wandstärke ist in diesem Falle $12 - 9 = 3 \text{ cm.}$

Antwort: Ist in der zweiten Kugel der innere Radius 12 cm lang, so ist die Wandstärke 1,971 cm; ist aber der äußere Radius 12 cm lang, so ist die Wandstärke 3 cm.

3. Mittelfranken. 1892.

Aus einer Kugel vom Radius $= 5$ cm ist ein cylindrischer Kern herausgebohrt, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt des herausgebohrten Kernes, wenn der Radius seines Querschnittes 3 cm ist?

Lösung.

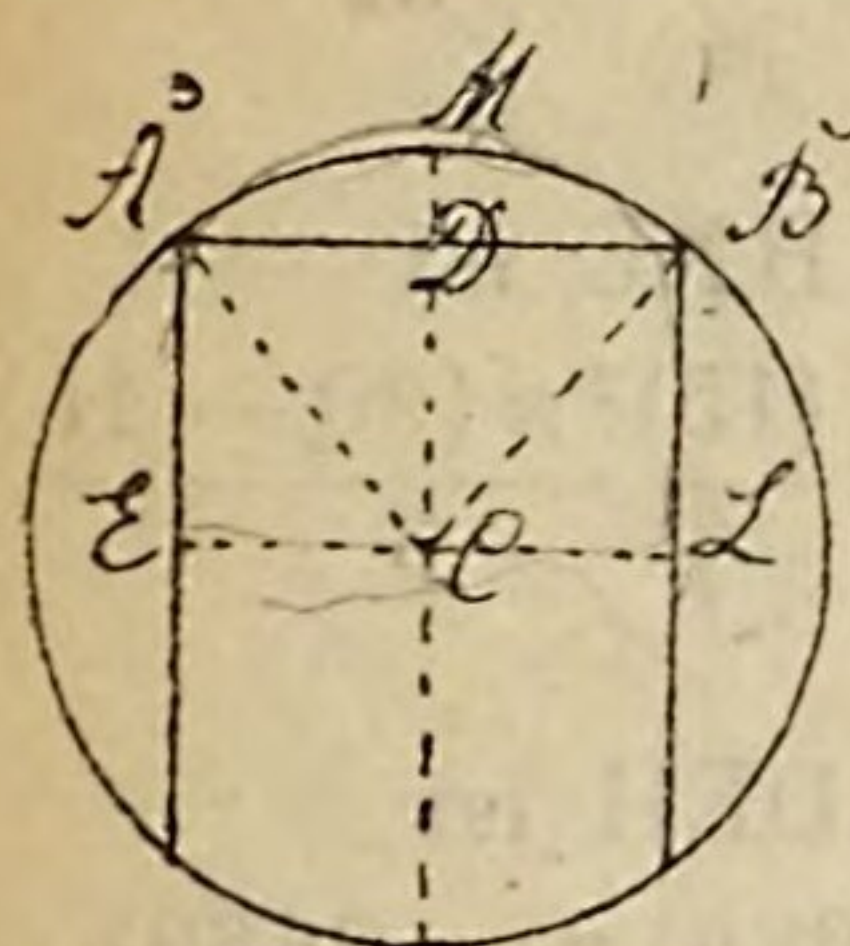


Fig. 57.

Die Hälfte des Kernes besteht: I. aus dem kegelförmigen Ausschnitte CAMB, II. aus dem ausgehöhlten Cylinder EACBL. Um den Inhalt des kegelförmigen Ausschnittes zu berechnen, muß man die Oberfläche der Kugelhaube AMB bestimmen, wozu MD nötig ist. Nun ist $BD = 3$ cm bekannt. Dieses ist aber die mittlere geometrische Proportionale zwischen $MD = x$ und $2 \times 5 - x$. Somit ist

A. I.

$$x : 3 = 3 : (10 - x)$$

$$9 = 10x - x^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = 16$$

$$x - 5 = \pm 4$$

$$x = 1 \text{ cm, } DC = 4 \text{ cm.}$$

II. Die Oberfläche der Haube AMB ist $2 \times 5 \times 3,14 \times 1 = 31,4$ qcm.

III. Der Inhalt des kegelförmigen Ausschnittes CAMB ist

$$\frac{31,4 \times 5}{3} = 52,333333 \text{ cm.}$$

IV. Der Inhalt des ausgehöhlten Cylinders EMCBL ist

$$\frac{2}{3} \times 3^2 \pi \cdot 4 = 24 \times \pi = 75,36 \text{ ccm.}$$

V. Der Inhalt des Kernes ist $2 \times (52,333 + 75,360) = 255,386$ ccm.

B. I. Die Oberfläche der Haube AMB ist 31,4 qcm.

II. Der Mantel des Cylinders EABL $= 2 \times 3 \times 3,14 \times 4 = 75,36$ qcm.

III. Die Oberfläche des ganzen Kernes ist $2 \times (31,4 + 75,36) = 213,52$ qcm.

Antwort: Die Oberfläche des Kernes ist 213,52 qcm, der Kubikinhalt 255,386 qcm.

3. Mittelfranken. 1891.

Durch eine Kugel mit einem 60 cm langen Durchmesser werden 18 cm links und 15 cm rechts vom Kugelcentrum entfernt parallele Ebenen gelegt. Welchen Inhalt besitzt der zwischen diesen Ebenen sich befindliche Zonenabschnitt?

1. Lösung.

Die körperliche Zone ADEH ist so groß wie die Kugel weniger die Hauben ALD und HNE.

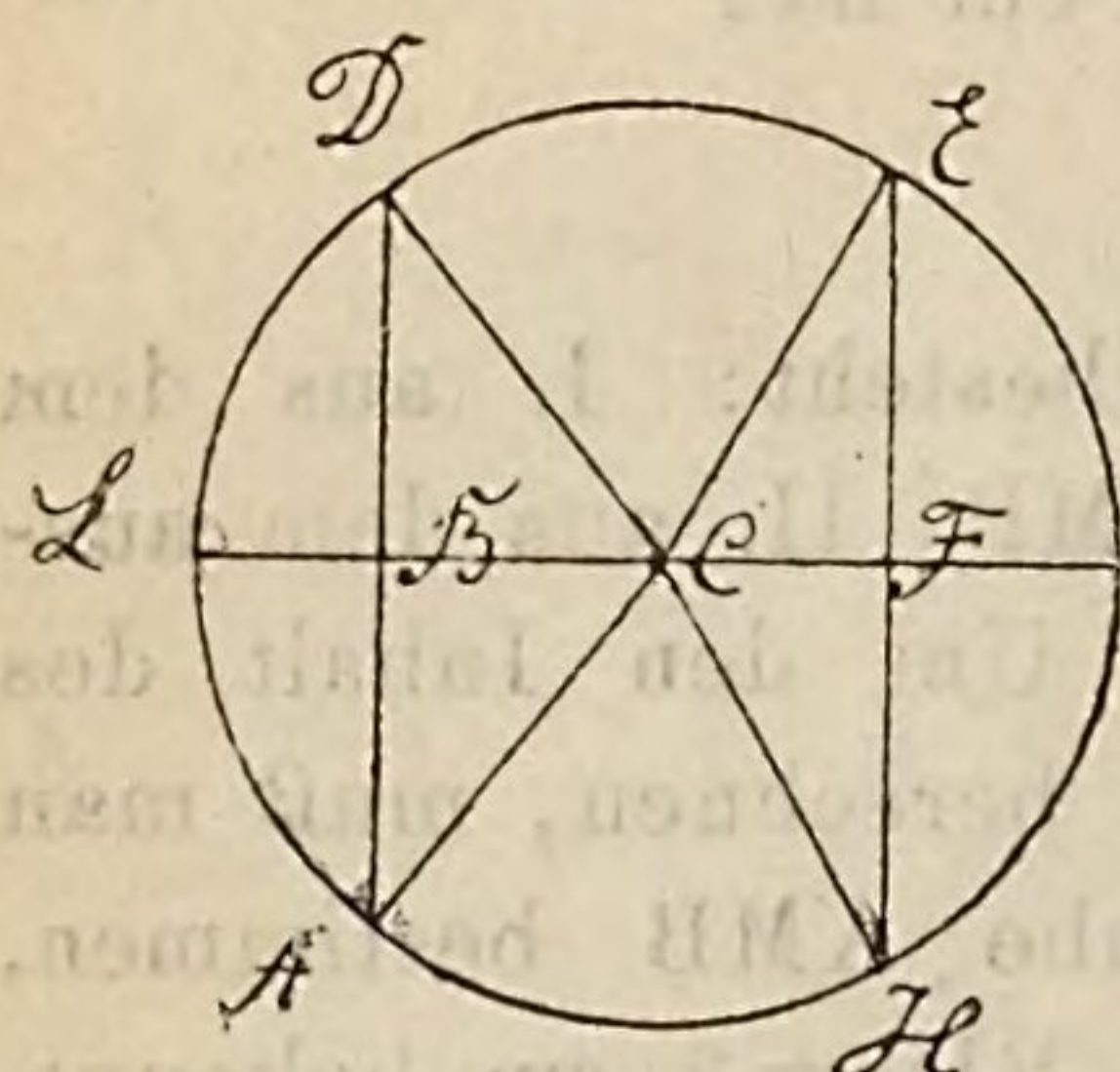


Fig. 58.

I. Der Inhalt der Kugel ist $\frac{4}{3} (30)^3 \pi$

II. Der Inhalt der Haube ALD ist

$$\frac{\overline{LB}^2 \pi (3 LC - LB)}{3} = \frac{(12)^2 \pi (90 - 12)}{3} = 3744 \pi.$$

III. Der Inhalt der Haube HNE ist

$$\frac{\overline{FN}^2 \pi (3 CN - FN)}{3} = \frac{(15)^2 \pi (90 - 15)}{3} = 5625 \pi.$$

IV. Der Inhalt der Zone ADEH ist

$$(36000 - 3744 - 5625) \pi = 26631 \pi = 83621,34 \text{ ccm.}$$

2. Lösung.

Der körperliche Inhalt der Zone ADEH ist die Summe aus dem Inhalte des keilförmigen Ringes, des Kegels ACD und des Kegels HCE.

I. Der Kubikinhalte des keilförmigen Ringes, dessen Querschnitt DCE ist, beträgt:

$$\frac{60 \pi \times (18 + 15) \times 30}{3} = 19800 \pi.$$

$$\text{II. Der Inhalt des Kegels ACD} = \frac{[(30)^2 - (18)^2] \pi \times 18}{3} = 3456 \pi.$$

$$\text{III. Der Inhalt des Kegels HCE} = \frac{[(30)^2 - (15)^2] \pi \times 15}{3} = 3375 \pi.$$

$$\text{IV. Der Kubikinhalte der Zone ADEH ist } (19800 + 3456 + 3375) \pi = 26631 \pi = 83621,34 \text{ ccm.}$$

Antwort: Der Zonenabschnitt besitzt 83621,34 ccm.

Die Grundformel für Kubikinhalte der Kugelhaube AMB (Fig. 57), wenn MD = h und MC = R bekannt sind, beträgt $V = h^2 \pi \left(R - \frac{1}{3} h \right)$ oder $\frac{h^2 \pi}{3} (3 R - h)$. Die Herleitung dieser Formel ist: Der Inhalt ist gleich dem Inhalt des kegelförmigen Ausschnittes AMBC weniger dem Kegel ADBC; also

$$V = \frac{2 R \pi h \times R}{3} - \frac{\overline{BD}^2 \pi \cdot DC}{3}$$

$$V = \frac{h \pi}{3} \times 2 R^2 - \frac{(R^2 - DC^2) \pi DC}{3}$$

$$V = \frac{h \pi}{3} \times 2 R^2 - \frac{(R + R - h) (R - R + h) \pi \cdot (R - h)}{3}$$

$$V = \frac{h \pi}{3} \times 2 R^2 - \frac{h \pi}{3} (2 R - h) (R - h)$$

$$V = \frac{h \pi}{3} [2 R^2 - (2 R^2 - 3 R h + h^2)]$$

$$V = \frac{h \pi}{3} (3 R h - h^2) = \frac{h^2 \pi}{3} (3 R - h) \text{ oder } h^2 \pi \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

3. Oberfranken. 1889.

Die Summe der ersten und zweiten Seite eines Dreieckes beträgt 28 cm, diejenige der ersten und dritten Seite 24 cm, und die der zweiten und dritten 20 cm. a) Welches ist der Inhalt des Dreieckes? b) Welches Volumen besitzt ein gerader Kegel, der sich aus einer Kugel von 2571,14 cm Inhalt ausschneiden läßt, wenn die Spitze des Kegels im Mittelpunkte der Kugel liegt und die Basis desselben dem in das obige Dreieck eingeschriebenen Kreise entspricht?

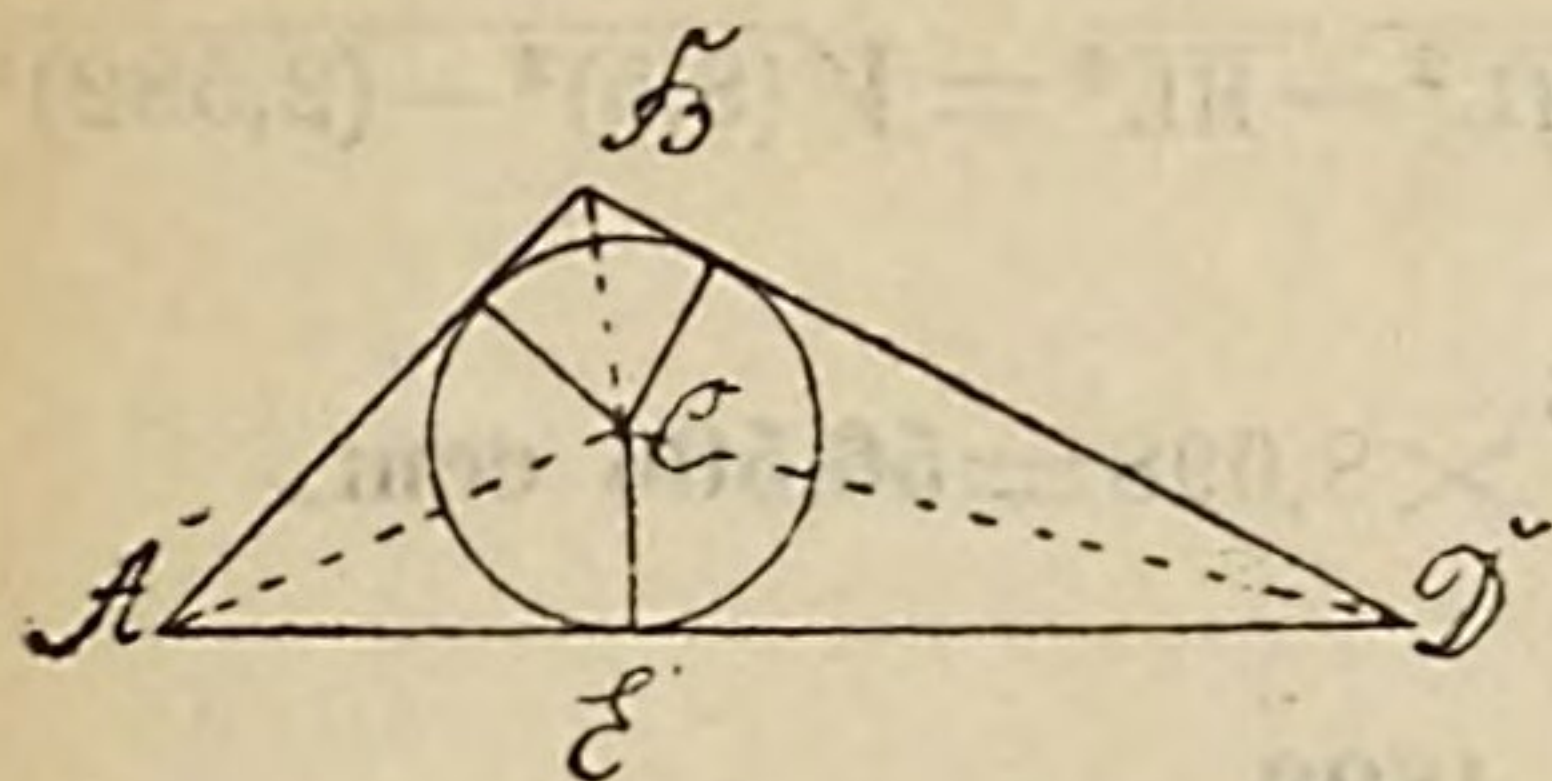


Fig. 59.

a) Welches ist der Inhalt des Dreieckes? b) Welches Volumen besitzt ein gerader Kegel, der sich aus einer Kugel von 2571,14 cm Inhalt ausschneiden läßt, wenn die Spitze des Kegels im Mittelpunkte der Kugel liegt und die Basis desselben dem in das obige Dreieck eingeschriebenen Kreise entspricht?

Lösung.

- A. Der Inhalt des Dreieckes wird aus den drei zuvor bestimmten Seiten berechnet.
- B. Hierauf wird der Radius und Inhalt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises gesucht.
- C. Da der Radius der Kugel die Seitenhöhe des zu suchenden Kegels bildet, so ist der genannte Radius aus dem Kugelinhalte zu berechnen.
- D. Zur Bestimmung des Kegelinhaltes sind sodann der Radius der Grundfläche und die Seitenhöhe bekannt.

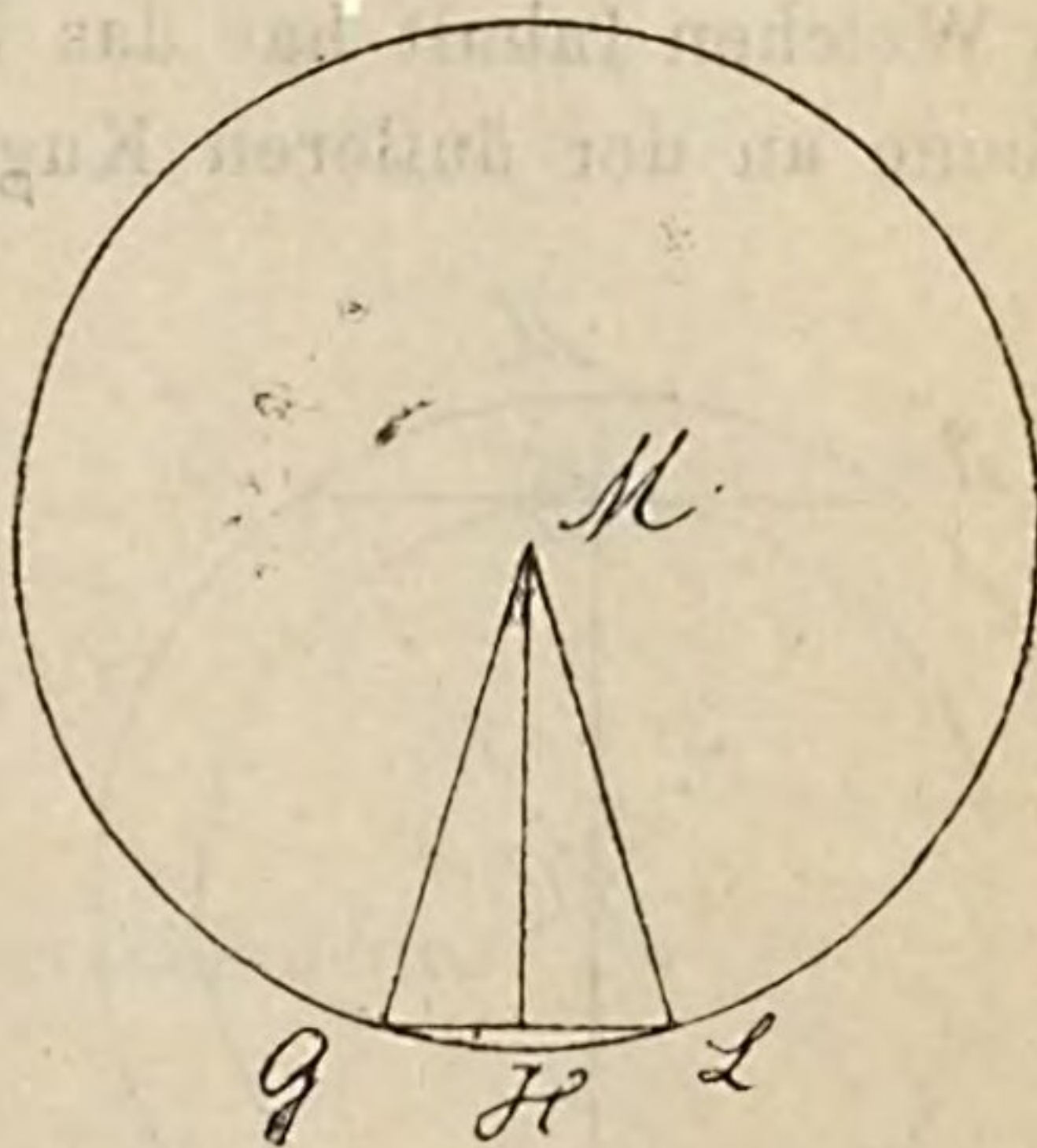


Fig. 60.

Ausführung.

- A. I. Die doppelte Summe der drei Seiten des Dreieckes ist 72 cm, die halbe Summe 18, die erste Seite 16, die zweite 12 und die dritte 8 cm.
- II. Der Inhalt des Dreieckes ist $F = \sqrt{18 \times 10 \times 6 \times 2} = 12\sqrt{15} = 12 \times 3,873 = 46,476$ qcm.
- B. I. Bezeichnet r den Radius des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises, so ist

$$\frac{AD \cdot r}{2} + \frac{BD \cdot r}{2} + \frac{AB \cdot r}{2} = 46,476$$

$$\frac{r}{2} (16 + 12 + 8) = 46,476$$

$$r = \frac{46,476}{18} = 2,582 \text{ cm.}$$

II. Die Kreisfläche ist $r^2 \pi = \left(\frac{12 \sqrt{15}}{18}\right)^2 \pi = \frac{20}{3} \times 3,14 = 20,9333 \text{ qcm.}$

C. Der Radius (ML) der Kugel ist $ML = \sqrt[3]{\frac{2571,14 \times 3}{4 \times 3,14}} = 8,5 \text{ cm.}$

D. I. Die Höhe des Kegels ist $MH = \sqrt{ML^2 - HL^2} = \sqrt{(8,5)^2 - (2,582)^2} = \sqrt{11,082 \times 5,918} = 8,098 \text{ cm.}$

II. Der Inhalt des Kegels ist $\frac{20,9333}{3} \times 8,098 = 56,506 \text{ ccm.}$

3. Oberfranken. 1892.

Eine konzentrische Kugelschale ist 4 cm dick; ein ebener Schnitt, welcher durch die äußere Kugel geht und die innere berührt, hat einen Halbmesser von 12 cm. a) Welches Volumen hat die Hohlkugel? b) Welchen Inhalt hat das kleine Kugelsegment, das durch die genannte Ebene an der äußeren Kugel abgeschnitten wird?

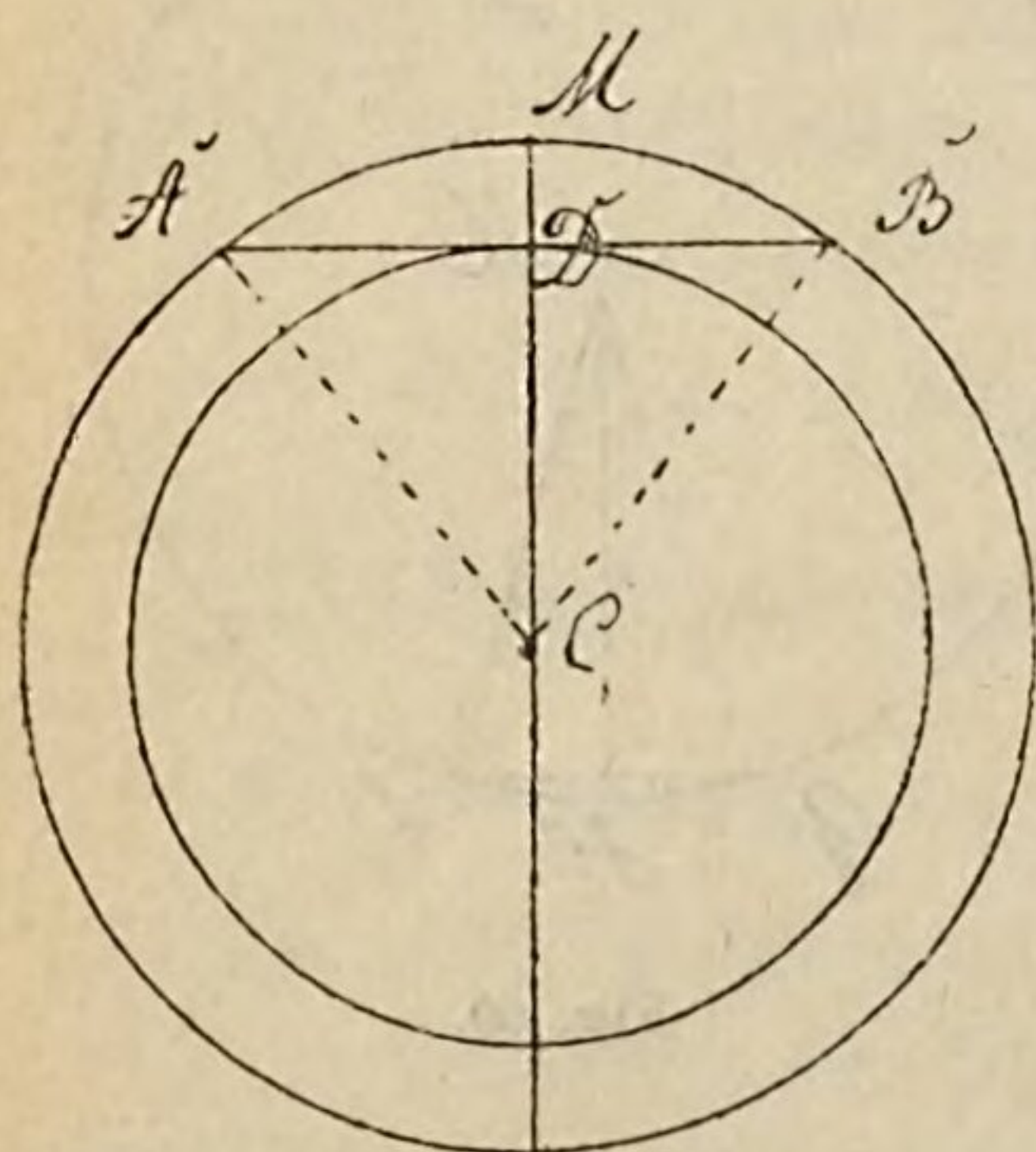


Fig. 61.

Lösung.

A. I. Um die Volumen der Hohlkugel*) zu berechnen, müssen der äußere und innere Radius (R und r) bekannt sein oder berechnet werden.

Nun ist

$$MD : DB = DB : (2R - MD)$$

$$4 : 12 = 12 : (2R - 4)$$

$$36 = 2R - 4$$

Hieraus ergibt sich $2R = 40$ und

$$R = 20; \text{ ferner } DC = r = 16.$$

II. Das Volumen der Hohlkugel ist

$$\frac{4}{3} (20)^3 \pi - \frac{4}{3} (16)^3 \pi = \frac{4}{3} \pi \times 3904 = 16344,747 \text{ ccm.}$$

B. Der Inhalt des Segmentes AMBD ist gleich dem Inhalte des kegelförmigen Ausschnittes weniger dem Inhalte des Kegels ACBD, also

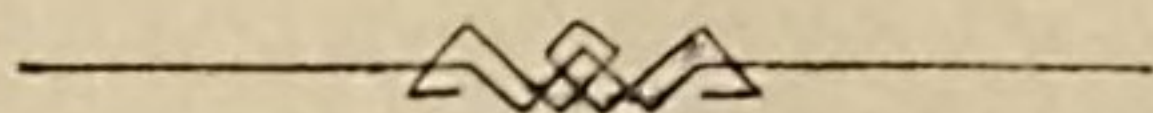
$$\frac{2 \times 20 \times 3,14 \times 4 \times 20}{3} - \frac{(12)^2 \pi \times 16}{3} = \frac{8}{3} \times 3,14 (400 - 288) = 937,813 \text{ ccm.}$$

Antwort: a) Das Volumen der Hohlkugel ist 16344,747 ccm; b) der Inhalt des Segmentes ist 937,813 ccm.

*) Volumen der Hohlkugel nennt man die Masse der Kugelschale.

Inhalt.

Einleitung	Seite 3
Würfel	„ 4
Gerade Prismen	„ 5
Pyramide	„ 10
Abgekürzte Pyramide (Pyramidenstumpf)	„ 15
Cylinder	„ 22
Kegel	„ 29
Kegelstumpf (abgekürzter Kegel)	„ 37
Vermischte Aufgaben über Körper mit verschiedenen Begrenzungsflächen	„ 45
Kugel und vermischte Aufgaben (Hohlkugel, Kugelschnitte u. s. w.)	„ 57



Lösungen der Rechnungsaufgaben für Schuldienst-Exspektanten

Bd.: 3

1897

Bavar. 1275 qo-1/4

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11801564-6